



# NEWSLETTER AIFIRM

RISK MANAGEMENT MAGAZINE

Rivista dell'Associazione Italiana Financial Industry Risk Managers

Anno 6, numero 1

Gennaio - Febbraio - Marzo 2011

Poste Italiane - Spedizione in abbonamento postale - 70% aut. DCB / Genova nr. 569 anno 2005



IN QUESTO NUMERO

3	Editoriale di Maurizio Vallino e Corrado Meglio
4	Il ruolo della Funzione Controllo Rischi nel percorso di Basilea 3 di Anna Mascolo e Paolo Palliola
8	La misurazione del rischio di tasso di interesse del portafoglio bancario in Basilea 2: quali le possibili criticità nella ricerca di nuove best practices? di Domenico Curcio e Igor Gianfrancesco
21	Financial stress index in risk management di Amira Dridi e Silvia Figini
24	Studio della convergenza dei modelli di pricing discreti multinomiali azionari: Teoria e applicazioni con tecniche di controllo dell'errore di Pier Giuseppe Giribone e Simone Ventura

**Newsletter AIFIRM – Risk Management Magazine**

Anno 6, n°1 Gennaio - Febbraio - Marzo 2011

**Direttore Responsabile:**

Maurizio Vallino (Banca Carige)

**Condirettore**

Corrado Meglio (Banca di Credito Popolare)

**Consiglio Scientifico:**

Paolo Giudici (Università di Pavia)

Giuseppe Lusignani (Università di Bologna)

Renato Maino (Università di Torino)

Corrado Meglio (Banca di Credito Popolare)

Fernando Metelli (Alba Leasing)

Claudio Porzio (Università Parthenope)

Gerardo Rescigno (Banca Monte dei Paschi di Siena)

Francesco Saita (Università Bocconi)

Paolo Testi (Banca Popolare Milano)

Maurizio Vallino (Banca Carige)

**Vignettista:** Silvano Gaggero

**Proprietà, Redazione e Segreteria:**

Associazione Italiana Financial Industry Risk  
Managers (AIFIRM), Via Sile 18, 20139 Milano

Registrazione del Tribunale di Milano n° 629 del  
10/9/2004

E-mail: [segreteria@aifirm.it](mailto:segreteria@aifirm.it);

Tel. 389 6946315

Lunedì h.10-12;

Da Martedì a Venerdì h.15-17

**Stampa:** Algraphy S.n.c. - Passo Ponte Carrega 62-62r  
16141 Genova

**Le opinioni espresse negli articoli impegnano  
unicamente la responsabilità dei rispettivi autori**

**SPEDIZIONE IN ABBONAMENTO POSTALE AI  
SOCI AIFIRM RESIDENTI IN ITALIA, IN  
REGOLA CON L'ISCRIZIONE**



## EDITORIALE

Carissimi lettori,

apriamo questo numero con una riflessione sul rischio di liquidità che, al di là delle motivazioni tecniche, mette in evidenza il ruolo della funzione di gestione del rischio e di quella del controllo di gestione, prendendo spunto dall'aggiornamento del 27 dicembre 2010 della Circolare 263 di Banca d'Italia, che prevede che le banche si dotino di prezzi di trasferimento interni (TIT) che comprendano anche il costo della liquidità.

La recente crisi finanziaria ha cambiato la composizione degli attivi e dei passivi delle banche, sia con riferimento alle masse di medio / lungo termine sia, e soprattutto, ai tassi attivi/passivi ed allo spread sulla curva free risk.

Gli ultimi anni sono stati caratterizzati dalla difficoltà delle istituzioni creditizie ad approvvigionarsi di fondi a medio / lungo termine; nel 2010 le banche italiane hanno aumentato i loro impieghi a medio / lungo per 123 miliardi mentre la raccolta a medio / lungo è diminuita per 9 miliardi: il sistema bancario ha così incrementato la propria trasformazione delle scadenze per 132 miliardi. Ciò ha permesso di preservare parte della redditività derivante dalla gestione caratteristica, sfruttando il basso costo del denaro a breve termine.

Si tratta, tuttavia, di una soluzione temporanea, in quanto sarà necessario incrementare la raccolta a medio / lungo con spread, per la componente istituzionale, che superano quello che il sistema è in grado di praticare alla clientela retail sulle operazioni di impiego.

L'equilibrio finanziario post crisi, quindi, vede un costo di raccolta più elevato e la difficoltà di caricare tale nuovo costo sulla clientela, con la generazione di operazioni a medio /lungo termine con un margine di interesse negativo in quanto gli spread, pagati sulle obbligazioni del mercato istituzionale, non hanno riscontro in molte operazioni di impiego.

Stiamo prendendo sempre più coscienza che il mercato finanziario è ancora in cerca di un nuovo equilibrio e che le tecniche di controllo di gestione e di risk management svolgono, in questa fase, un ruolo cruciale per la redditività della banca. E da qui nasce spontanea una riflessione su di una maggiore interazione tra le funzioni di controllo di secondo livello (nella fattispecie risk management e controllo di gestione) che, riteniamo, sia la strada giusta per una sana e prudente gestione degli intermediari finanziari.

Corrado Meglio e Maurizio Vallino

## Il ruolo della Funzione Controllo Rischi nel percorso di Basilea 3

di Anna Mascolo e Paolo Palliola (Cassa di Risparmio di San Miniato)

La fiducia nel sistema bancario è un prerequisito al suo effettivo contributo all'economia nel suo complesso. Recenti studi, promossi dai vari organismi internazionali, hanno dimostrato che la debolezza degli istituti bancari ed in particolare dei modelli di governance interna, anche se non hanno determinato direttamente la crisi finanziaria, sono da considerarsi tra gli elementi chiave che hanno contribuito alla stessa.

In particolare, a fine 2009, il *Committee of European Banking Supervisors* (CEBS<sup>1</sup>) ha promosso un'indagine per verificare il livello di implementazione, da parte delle autorità di supervisione e degli istituti bancari, delle linee guida di governance interna pubblicate nel gennaio 2006. Dall'indagine è emerso che, nonostante la regolamentazione emanata dalle Autorità di Vigilanza per la governance interna fosse esaustiva, la sua applicazione era stata in qualche modo frammentata, evidenziando molteplici gap. In particolare, tra gli elementi di debolezza sono emersi dei sistemi di risk management e dei controlli interni non integrati con le altre unità di business aziendali.

Nel mese di ottobre del 2010 il Comitato di Basilea (BCBS) ha emanato i nuovi principi di corporate governance (*Principles for enhancing corporate governance*) e nello stesso mese il CEBS, prendendo a riferimento i risultati della indagine fatta a fine 2009<sup>2</sup> e gli ultimi lavori svolti a livello europeo in particolar modo dal Comitato di Basilea, consolida ed aggiorna le proprie *Guidelines* in tema di governance interna, ivi compresi i principi guida per il risk management contenuti nel documento *High Level Principles on Risk Management* (febbraio 2010), in un unico *Guidebook on Internal Governance*<sup>3</sup>. È a quest'ultimo documento che si fa quindi riferimento per definire i principi guida che riguardano sia il Risk Management – inteso nell'accezione di governo dei rischi – sia le Funzioni di Controllo aziendali degli istituti di credito. Dal momento che un approccio “one size fits all” sarebbe controproducente in relazione a tematiche quali la governance interna, il regulator fissa i principi guida validi per le banche di maggior dimensioni, premettendo che per la loro attuazione da parte di ciascuna banca o gruppo, si dovrà tener conto del c.d. principio di proporzionalità<sup>4</sup>, ovvero della dimensione e della complessità organizzativa ed operativa di ciascun intermediario creditizio.

Il principio cardine attorno al quale ruotano le linee guida inerenti il risk management è la promozione di una robusta cultura del rischio a livello aziendale, integrata ed incentrata sull'effettiva operatività dell'azienda. È pertanto indispensabile che vi sia la piena consapevolezza dei rischi da fronteggiare e di come essi vengono gestiti nell'ambito del rispetto della risk tolerance/appetite definita da ciascun istituto. Uno dei pre-requisiti per la creazione di tale cultura è istituire una funzione di risk management, che sia in grado di coprire tutte le fattispecie di rischio rilevanti per l'istituto (sia a livello di ciascuna unità di business che nell'accezione di “rischio rilevante” ovvero del rischio a cui l'istituto è o potrebbe essere esposto in base alla propria attività), ed è indispensabile che tale funzione - sotto la diretta responsabilità di un Chief Risk Officer o di un senior manager - sia indipendente. Le informazioni sul rischio dovranno essere comunicate con chiarezza a tutti i livelli della struttura organizzativa della banca ed in particolare all'alta direzione che le interpreta e le utilizza nel processo decisionale. A tal fine le banche si dotano di una policy di comunicazione adeguata/proporzionata alla dimensione ed alla complessità dell'organizzazione aziendale nonché al profilo di rischio dell'istituto. In sostanza a livello di “management body” ricade la responsabilità di condurre la propria attività di gestione e controllo nella piena consapevolezza della natura del proprio business e dei rischi associati ad esso. I responsabili di tali funzioni devono essere in possesso di skills adeguati alle proprie responsabilità e quindi dovranno essere in grado di comprendere anche le tematiche in cui non sono direttamente coinvolti e parte di essi dovranno comunque possedere una sufficiente esperienza pratica nelle attività di business che sono chiamati a governare o controllare. Oltre ad un adeguata politica di comunicazione interna della “cultura del rischio” è indispensabile che le politiche di governo del rischio (sia in termini di responsabilità, che della risk tolerance<sup>5</sup> e del risk appetite deliberati dal management body<sup>6</sup>) siano formalizzate in documenti soggetti a periodica revisione, tale documentazione deve indicare in

<sup>1</sup> Dal 1° gennaio 2011 tutti i poteri del CEBS sono confluiti nell'European Banking Authority (EBA).

<sup>2</sup> A survey on the implementation by supervisory authorities and institutions of CEBS' Internal Governance Guidelines, carried out in late 2009, revealed a number of weaknesses in terms of oversight of the supervisory function, risk management and internal control frameworks. Institutions' complexity and the riskiness of the products and services offered were often not appropriately counterbalanced by internal governance arrangements (www.eba.eu).

<sup>3</sup> Si fa riferimento al CP44 del 13 ottobre 2010; a tale riguardo dal periodo di consultazione, terminato lo 14 gennaio, è emerso che, in merito alle tempistiche di recepimento da parte della Commissione Europea di tale guidebook “Given the fact that it will take considerable time before any initiatives from EC in the field of corporate governance for financial institutions become final EU legislative instruments, CEBS (dal 1° gennaio 2011 EBA – European Banking Authority) intends to go forward with the Guidebook as it stands now, i.e. implementing it by the end of September 2011, without waiting for the EC initiative”.

<sup>4</sup> “According to the principle of proportionality, guidelines for institutions and supervisors are to be applied in a proportionate manner to reflect the nature, scale and complexity of the activities of the institutions”, CEBS, *High level principles for risk management*, 16 February 2010.

<sup>5</sup> Gli istituti definiscono il proprio “risk appetite” e la “risk tolerance” in vari modi, ivi compreso un set di target obiettivo di rating per il credito o di return on equity; a tale riguardo il regulator non indica una regola da seguire se non che gli obiettivi vengano formalizzati e siano coerenti tra loro e soprattutto siano definiti in modo da garantire il rispetto dei requisiti regolamentari inerenti il capitale e la liquidità. Nel definire il risk appetite/tolerance la banca deve tener conto di tutti i rischi rilevanti.

<sup>6</sup> Il management body e l'alta direzione sono responsabili della definizione del risk appetite/tolerance in base agli obiettivi aziendali.

modo chiaro i compiti e le responsabilità del management body e del senior management nella supervisione dei rischi. In particolare il senior management/alta direzione sarà responsabile della governo dei rischi su base giornaliera (day-by-day).

La particolare attenzione alla valutazione del rischio emerge anche dall'esigenza del regulator che le stesse politiche di remunerazione aziendali tengano conto del profilo di rischio assunto oltre che di criteri di performance e siano aggiustate/paramtrate a obiettivi di lungo termine che promuovano quindi la stabilità aziendale e non incoraggino un'eccessiva assunzione del rischio (la componente variabile della retribuzione deve essere parametrata ad indicatori di performance misurati al netto dei rischi in un orizzonte pluriennale – cd. *ex-ante risk adjustment*). Il regulator pone particolare attenzione nel fissare il criterio cardine da seguire per la determinazione delle politiche retributive sia di coloro che hanno un impatto rilevante sul profilo di rischio dell'istituto (si veda a titolo esemplificativo i membri del management body o i componenti dell'alta direzione) che delle funzioni di controllo, la cui remunerazione deve essere svincolata dagli obiettivi delle unità di business sottoposte al loro controllo. A conferma di tale tendenza il *Financial Stability Board* ha raccomandato<sup>7</sup> alle banche una maggiore trasparenza delle politiche retributive ed in particolare che venga fatta una disclosure “granulare” di tutte le metriche utilizzate per determinare le politiche retributive aziendali (componenti fisse e variabili, differite e non, ponderate per il rischio assunto) nell'ambito dell'Informativa al pubblico (III Pilastro di Basilea 2). In recepimento di suddetta raccomandazione, il Comitato di Basilea nel dicembre 2010 ha pubblicato un documento di consultazione inerente la disclosure del sistema retributivo delle banche nell'ambito del terzo Pilastro<sup>8</sup>. La ratio del Comitato è che suddetti requisiti aggiuntivi agevolerebbero una disciplina efficiente di mercato e soprattutto consentirebbero di valutare la qualità delle procedure di determinazione delle retribuzioni e quindi la qualità del complessivo sistema di determinazione delle strategie aziendali e della valutazione dei rischi rilevanti. Nel rispetto dell'ormai noto principio di proporzionalità (ed in particolare del profilo di rischio della banca) e tenuto conto della riservatezza obbligatoria di alcune informazioni, il documento elenca il set di informazioni di natura qualitativa (metriche di ponderazione, fattori considerati, modalità di pagamento scelte, ecc) e quantitativa da fornire nell'ambito di due tabelle contenute nell'allegato.

Sempre nel mese di dicembre 2010 la Banca d'Italia ha pubblicato un documento per la consultazione dal titolo “*Disposizioni di vigilanza in materia di politiche e prassi di remunerazione e incentivazione nelle banche*” in attuazione della direttiva 2010/76/UE del 14 dicembre 2010 (cd. CRD III), tali modifiche verranno recepite nel Testo Unico Bancario e saranno immediatamente applicate. In sostanza viene ribadito quanto predisposto a livello europeo che i sistemi retributivi – soprattutto quelli relativi al “personale più rilevante”<sup>9</sup> - devono essere coerenti con gli obiettivi di stabilità aziendali ovvero che la retribuzione incentivante tenga conto dei rischi assunti e del capitale e della liquidità necessari a fronteggiare il business intrapreso nel perseguimento dell'interesse della società in un'ottica di lungo periodo. Inoltre, per promuovere una maggior consapevolezza da parte degli *shareholders* dei costi complessivi delle remunerazioni, Banca d'Italia attribuisce all'assemblea ordinaria il compito di approvare le politiche di remunerazione per alcune tipologie di dipendenti quali gli organi di supervisione, gestione e controllo e del personale, nonché di particolari cariche dei componenti del consiglio di amministrazione, la stessa assemblea è destinataria di un flusso informativo sulle modalità di attuazione di tali politiche con cadenza almeno annuale<sup>10</sup>. Spetta alle funzioni di controllo interno, invece, il compito di assicurare che le politiche siano coerenti con la normativa vigente ed il loro corretto funzionamento.

Ciascun istituto deve approvare il proprio framework per l'attività di risk management (tale documento è soggetto a revisione periodica da parte di organi indipendenti quali la funzione di internal audit) che costituisce una guida specifica e formalizzata, disciplina le politiche e le pratiche di gestione dei rischi, i limiti (in coerenza con la risk tolerance o il risk appetite dell'azienda) ed i relativi controlli, le tempistiche ed i processi di identificazione, misurazione/valutazione, monitoraggio, mitigazione e reporting dei rischi associati alle attività di ciascuna business line e dell'istituto nel suo complesso. Nella fase di identificazione e misurazione/valutazione dei rischi rilevanti le banche devono adottare sia metodologie di tipo forward-looking (es. analisi di scenario e stress test) – volte ad individuare potenziali esposizioni al rischio sotto ipotesi di circostanze avverse - che backward-looking, per poter effettuare una revisione dei profili di rischio assunti e quindi apportare le eventuali correzioni/modifiche. In tale processo, la valutazione dei rischi non deve fare troppo affidamento né a metodi di valutazione esterna<sup>11</sup> del rischio (quali ad esempio i rating esterni sul credito) né tantomeno sui soli dati quantitativi. Il legislatore vuole in questo modo evitare che un'eccessiva fiducia negli strumenti di valutazione esterni e/o statistici privi l'azienda della capacità

<sup>7</sup> Si fa riferimento al documento *Peer Review Report on Compensation* del marzo 2010, dove il FSB constatava le differenze tra i requisiti di trasparenza delle politiche remunerative esistenti tra le varie giurisdizioni e a tale proposito notava che tali differenze potrebbero ostacolare la comparabilità delle informazioni pubblicate e l'efficacia della stessa disclosure.

<sup>8</sup> Si fa riferimento al documento di consultazione *Pillar 3 Disclosure Requirement for Remuneration* - emanato a dicembre 2010 – il cui periodo di consultazione è iniziato il 25 febbraio dell'anno in corso.

<sup>9</sup> “Le banche svolgono un'accurata auto-valutazione per identificare le categorie di soggetti la cui attività professionale ha o può avere un impatto rilevante sul profilo di rischio della banca.” Banca d'Italia indica anche i soggetti e le attività svolte per i quali vale la presunzione, salvo prova contraria, di appartenenza nella categoria del “personale più rilevante” (cfr. “*Disposizioni di vigilanza in materia di politiche e prassi di remunerazione e incentivazione nelle banche*” §3.2 - Banca d'Italia - dicembre 2010).

<sup>10</sup> Responsabile dell'adozione delle politiche di remunerazione è l'organo di supervisione strategica, che si avvale della collaborazione della funzione di gestione dei rischi, *compliance*, risorse umane e pianificazione strategica, e che ne riesamina i contenuti almeno una volta l'anno.

<sup>11</sup> “Institutions should avoid over reliance on any specific risk methodology or model. Modeling and risk management techniques should be only one part of the risk management system and should always be tempered by expert judgment” – CEBS *Higl level principles for risk management* – 16 febbraio 2010.

di analisi interna della propria esposizione ai rischi. Infine si ribadisce l'importanza notevole di una efficace comunicazione interna e del relativo sistema di reporting in modo che si enfatizzino le sinergie tra i vari owner di processo per una più corretta gestione del rischio aziendale. Si introduce, in sostanza, un concetto di responsabilità diffusa nella gestione del rischio, che non è più appannaggio esclusivo del risk manager ma coinvolge tutte le unità di business, responsabili in primis nella gestione *day-by-day* dei rischi generati dalla propria attività di business.

Per realizzare tutto ciò il regulator europeo estende il concetto di “organo di controllo” ad un insieme di funzioni quali la Funzione Controllo Rischi, la Funzione Compliance e la Funzione Internal Audit, le cui attività vengono formalizzate in framework che identifichino le mansioni di ciascuna funzione indipendente<sup>12</sup> dalle unità di business sottoposte al loro controllo e che garantiscano interventi efficaci ed efficienti, un adeguato controllo dei rischi, una condotta prudente del business, l'affidabilità delle informazioni finanziarie. Tali funzioni di controllo interne devono essere organizzate secondo livelli gerarchici<sup>13</sup> e dotate di standing (autorevolezza, professionalità, esperienza, costante aggiornamento, ecc) tali da assicurare che le stesse siano in grado di adempiere adeguatamente alla propria mission.

E' quindi nell'ambito del Sistema dei Controlli Interni che viene inserita la Funzione Controllo Rischi il cui principale compito è quello di garantire l'identificazione e la gestione appropriata di tutti i rischi, avendo pieno accesso alle informazioni rilevanti e avvalersi, ove necessario, di giudizi di esperti esterni. Essa implementa e fa rispettare le policy di gestione dei rischi in modo che siano coerenti con la risk tolerance/appetite deliberata dal management body, deve essere coinvolta attivamente sia nella fase iniziale dell'elaborazione della risk strategy aziendale che nelle decisioni inerenti la gestione e la mitigazione di tutti i rischi che si sono manifestati. Suddetta funzione, infatti, fornisce al management body tutte le informazioni relative ai rischi che possano essere di supporto nel processo decisionale e nella prudente gestione aziendale. La funzione condivide con tutte le business unit la responsabilità nel determinare la risk strategy e le policy aziendali; in tale senso, mentre le business unit mettono in pratica i limiti rilevanti di rischio, la Funzione Controllo Rischi è responsabile di garantire che tali limiti siano in linea con la risk tolerance/appetite complessiva dell'azienda.

Oltre ad essere coinvolta nella fase iniziale di definizione degli obiettivi aziendali di risk strategy, la Funzione Controllo Rischi deve essere coinvolta nel valutare l'impatto dei cambiamenti sostanziali e delle operazioni straordinarie dal punto di vista del profilo di rischio dell'istituto e/o del gruppo nel suo complesso nonché l'introduzione di nuovi prodotti o la modifica sostanziale di quelli già esistenti.

Ciascun istituto – in linea con il principio di proporzionalità – incarica una persona della responsabilità esclusiva della Funzione Controllo Rischi che sia in possesso dei requisiti di competenza, esperienza operativa, indipendenza e autorevolezza/anzianità tali da poter promuovere decisioni che influenzino l'esposizione al rischio dell'istituto ed il processo decisionale (tali poteri vengono formalizzati in un framework che definisce altresì le modalità di assegnazione dell'incarico e/o di sostituzione e di comunicazione di tali modifiche alle autorità di vigilanza). In tale contesto il Chief Risk Officer e il management body o i comitati competenti comunicano apertamente tra di loro sulle questioni chiave inerenti il rischio.

Il regulator focalizza l'attenzione sul responsabile della Funzione Risk Management ovvero il Chief Risk Officer (CRO), che – qualora, vuoi per la ridotta dimensione dell'istituto piuttosto che per la natura della sua attività poco complessa, non dovesse essere opportuna una sua designazione esclusiva – può anche essere un componente dell'alta direzione. Il CRO (o equivalente) deve essere comunque dotato di indipendenza e autorevolezza tali da renderlo in grado di cambiare - o porre al limite anche il veto - il processo decisionale dell'istituto. La sua posizione quindi gli permette di avere diretto accesso all'organo con funzione di governo per verificare che le scelte di business fatte siano coerenti con la risk tolerance/appetite; a tal fine il CRO – quando ne ravvede la necessità – può riportare direttamente al management body o al Comitato Audit. L'esperienza e gli skills del CRO devono quindi essere rapportati al profilo di rischio dell'istituto in quanto sarà suo compito aiutare il management body a comprendere il rischio a cui complessivamente è sottoposta l'azienda.

### **Un esempio del ruolo della Funzione Controllo Rischi in una banca di Classe 3**

Le banche di Classe 3, come la Cassa di Risparmio di San Miniato SpA (capogruppo del gruppo Carismi), pur essendo caratterizzate da un livello di complessità operativa non elevato, non sono esentate dal recepimento delle linee guida del Comitato di Basilea, fermo restando il criterio di proporzionalità. Nell'ambito della realtà aziendale del gruppo Carismi è stata istituita una Funzione Controllo Rischi indipendente con a capo un Dirigente designato dal Consiglio di Amministrazione. La creazione nell'organigramma aziendale di una funzione destinata alla gestione del rischio e la sensibilità del Consiglio di Amministrazione hanno permesso un periodico flusso di informazioni sui principali rischi a cui la banca è esposta con set informativi in continuo arricchimento (i.e. rischio di credito, di mercato, di tasso e di liquidità) oltre la normale reportistica

<sup>12</sup>In linea di massima una funzione di controllo può considerarsi “indipendente” quando ricorrono i seguenti presupposti:

- lo staff non contribuisce a nessun obiettivo che rientri nell'ambito delle attività che la funzione di controllo deve controllare e monitorare;
- nell'organigramma è tenuto separato dalle attività che deve controllare e monitorare;
- il responsabile della funzione è subordinato a una persona che non ha responsabilità nella gestione delle attività che la stessa funzione è chiamata a controllare/monitorare e si relazione direttamente al management body ed agli eventuali comitati interni;
- la retribuzione dello staff della funzione non è commisurata alla performance delle attività che essa controlla.

<sup>13</sup>Nonostante ciò, negli istituti meno complessi e dimensioni ridotte, le Funzioni Controllo Rischi e Compliance possono essere accorpate.

relativa al processo di autovalutazione dell'adeguatezza patrimoniale<sup>14</sup>. Ciò ha consentito di definire nel tempo un flusso periodico di informazioni tra il Risk Manager e l'organo di supervisione strategica nonché verso l'alta direzione attraverso la reportistica predisposta per il Comitato di Direzione.

La banca non è divisa in business unit ma in settori/funzioni/direzioni e ciascuna delle quali è owner di processo per la gestione dei rischi sottesi alla propria attività (a titolo esemplificativo la Tesoreria è responsabile della gestione del rischio di liquidità). In tale ambito ci sono ancora aree di miglioramento da perseguire e la funzione di controllo dovrà essere chiamata in causa sempre più con maggiore frequenza soprattutto nelle scelte strategiche e dei singoli business/processi.

Ad oggi comunque la Funzione Risk Management sta investendo progressivamente nel promuovere la "cultura del rischio" ad ogni livello gerarchico sia attraverso il costante flusso informativo verso i vertici aziendali, intesi sia nell'accezione del Consiglio di Amministrazione che del Comitato Direzione, su tematiche inerenti i rischi rilevanti del gruppo ma anche sugli sviluppi normativi in ambito internazionale e nazionale.

Nei confronti delle varie unità organizzative non ultima la rete commerciale è stato applicato con modalità differenti e con livelli di sensibilizzazione crescente il principio di presidio della qualità degli impieghi già dalla fase di assegnazione del budget annuale con riflessi importanti sul sistema premiante delle singole risorse/strutture.

Il Risk Management è sempre più coinvolto nella fase iniziale di supporto alle scelte strategiche aziendali e in primis nella definizione e revisione del Piano Strategico da parte del Consiglio di Amministrazione, contribuisce alla determinazione del livello di risk tolerance/appetite della banca e ne controlla il rispetto nel tempo. Infine, tramite anche il Comitato di Controllo Interno, coadiuva il Consiglio di Amministrazione nella valutazione dei rischi sottesi le attività di business della banca e del gruppo.

Allo stato attuale esistono delle politiche retributive formalizzate ed è in corso una loro revisione anche nell'ottica di recepire i recenti aggiornamenti normativi in argomento.

Trattandosi di banca di Classe 3 e quindi nel rispetto del principio di proporzionalità, la banca non si è ancora dotata di un processo formalizzato per l'emissione di nuovi prodotti (o per apportare modifiche sostanziali a quelli già esistenti), tuttavia, il Risk Management è chiamato a valutare degli impatti sul profilo di rischio della banca per tali operazioni nonché per le operazioni a carattere più strategico e/o straordinario.

Inutile dire che pur con tutto quanto sia stato fatto in questi ultimi anni, la strada da percorrere è ancora lunga ma, al contempo, spianata dalla maggior sensibilità da parte dei regulator internazionali alla creazione di una sistema bancario *risk oriented* che garantisca un processo di risk management pervasivo gestionalmente e che promuova una gestione del rischio "calzante" per la dimensione e per la tipologia di business della banca.

Anna Mascolo e Paolo Palliola

#### **Bibliografia**

- CEBS, **Consultation paper on the Guidebook on Internal Governance (CP44)**, 13 October 2010.
- Basel Committee on Banking Supervision, **Principles for enhancing corporate governance**, Basel, October 2010.
- EBA, **Results and main conclusions of public hearing on the draft internal Governance Guidebook**, 25 January 2011.
- Banca d'Italia, "**Disposizioni di Vigilanza in materia di politiche e prassi di remunerazione e incentivazione nelle banche (documento per la consultazione)**", dicembre 2010.
- Basel Committee on Banking Supervision, **Pillar 3 Disclosure Requirement for Remuneration (consultative document)**, 27 December 2010.
- CEBS, "**High Level Principles for risk management**", 16 February 2010.
- Financial Stability Board, **Peer Review Report on Compensation**, March 2010.
- CEBS, "**Guidelines on the Application of the Supervisory Review process under Pillar 2**", 25 January 2006.

---

<sup>14</sup>Il Consiglio di Amministrazione della capogruppo, infatti, oltre ad essere chiamato a deliberare sul processo ICAAP, è stato destinatario di un informativa semestrale sui dati di autovalutazione patrimoniale al 30 giugno con un focus particolare sugli obiettivi di risk strategy e sulla loro coerenza con il vigente piano industriale.

## La misurazione del rischio di tasso di interesse del portafoglio bancario in Basilea 2: quali le possibili criticità nella ricerca di nuove best practices?

di Domenico Curcio<sup>1</sup> e Igor Gianfrancesco<sup>2</sup>

### Abstract

Il presente contributo si propone di testare la robustezza metodologica del framework regolamentare proposto dalle Nuove disposizioni di vigilanza prudenziale per la misurazione del rischio di tasso di interesse del banking book oggetto di modifiche con l'aggiornamento del 27 dicembre 2010. L'analisi è effettuata applicando le due metodologie (metodologia standardizzata e simulazioni storiche) proposte dal quadro di vigilanza ad una ipotetica banca commerciale, la cui matrice per scadenze è costruita aggregando i dati di bilancio di un campione di 15 banche italiane di piccole e medie dimensioni. A tal fine, l'indicatore di rischio previsto dalla disciplina di vigilanza è calcolato modificando le ipotesi riguardanti la distribuzione dei depositi, il posizionamento delle poste di bilancio nelle varie fasce temporali della *maturity ladder* regolamentare e la metrica di risk *quantification* utilizzata (duration approssimata regolamentare vs. *key rate duration*).

Le evidenze empiriche ottenute dimostrano che, ai fini della determinazione dell'esposizione al rischio di tasso del banking book di una banca, le conseguenze derivanti dall'adozione di diversi criteri nella distribuzione dei depositi a vista (entro 1 anno vs. entro 5 anni) hanno un impatto maggiore delle scelte che guidano la procedura di *mapping* delle poste di bilancio nelle fasce della matrice regolamentare (collocazione nel punto medio della fascia vs. collocazione agli estremi della fascia) o di eventuali affinamenti degli indicatori di rischio adottati. Quanto detto apre nuovi scenari di ricerca in merito alla corretta collocazione dei depositi a vista nelle fasce temporali al fine di pervenire ad una più efficace e precisa misurazione dell'esposizione al rischio della banca e del capitale interno ad esso associato.

Inoltre, la nostra analisi evidenzia che, in corrispondenza di uno specifico set di ipotesi (distribuzione dei depositi, posizionamento delle poste e metrica di risk *quantification*), le metodologie di calcolo proposte dalle Autorità di Vigilanza conducono a risultati tra loro divergenti. Al riguardo, l'elaborazione da parte dei regulators di un framework quantitativo univoco basato su ipotesi più restrittive potrebbe non solo rendere più agevole l'individuazione delle c.d. "banche anomale" da parte degli stessi supervisors, ma anche ancorare a più solide basi la misurazione e il controllo del rischio in questione da parte delle banche.

**JEL classification:** G21, G28, G32.

**Keywords:** Banks, Basel II, Interest Rate Risk, Regulation, Risk Management

### Introduzione

L'esposizione al rischio di tasso di interesse del banking book deriva dalla funzione di trasformazione delle scadenze che le banche realizzano trasferendo risorse finanziarie dalle unità in surplus ai soggetti in deficit mediante l'interposizione del proprio bilancio. Il mismatching delle scadenze di attivo e passivo, associato alla tradizionale strategia di borrow short & lend long, può, in presenza di una yield curve orientata verso l'alto, favorire eccezionali performance reddituali. Tali risultati, tuttavia, possono essere tanto premianti quanto difficili da conservare. Inoltre, essi possono essere associati ad una strategia di impiego e di raccolta che l'intermediario potrebbe non essere in grado di adeguare in modo tempestivo ai cambiamenti del contesto di operatività. Al mutare delle condizioni di mercato, quindi, un modello di business molto remunerativo può diventare perdente, divenendo addirittura la fonte di minacce per la stessa solidità della banca: questo è l'insegnamento che la crisi delle savings & loans americane degli anni '80 ci ha lasciato. Tra il 1980 e il 1988 fallirono 563 di circa 4.000 S&Ls mentre altri fallimenti furono evitati mediante oltre 300 operazioni di fusione coordinate dalle Autorità di Vigilanza. La ragione principale della crisi può essere rintracciata in un brusco aumento dei tassi di interesse sui depositi, causato, da un lato, dalla competizione tra S&Ls, banche e fondi di mercato monetario, e, dall'altro, dall'inversione dell'inclinazione della yield curve, per effetto della quale i tassi di interesse a breve termine superarono i tassi di interesse a lunga scadenza. La variazione della pendenza della curva dei tassi trasformò i profitti derivanti dalla strategia di prestare a lungo e raccogliere a breve in perdite che vennero coperte mediante un intervento pubblico stimato nell'ordine di 1 miliardo di dollari.

La gestione del rischio di tasso ha acquisito una sempre maggiore importanza in banca proprio a partire dalla fine degli anni '70, quando la volatilità di questa variabile di mercato ha subito un notevole incremento rispetto al passato, a causa dell'influenza che shock economici del settore reale hanno avuto sul sistema finanziario. Allo stesso modo, implementare un efficace sistema di misurazione e gestione del rischio in questione è diventato, anche nella prospettiva delle Autorità di vigilanza internazionali, di fondamentale importanza, stante il fatto che le variazioni sfavorevoli dei tassi di interesse possono

<sup>1</sup> Università degli Studi di Napoli Federico II (email: domenico.curcio@unina.it) e Centro Arcelli per gli Studi Monetari e Finanziari, (email: dcurcio@luiss.it)

<sup>2</sup> Banca Popolare di Spoleto – Staff Politiche Creditizie (email: igor\_gianfrancesco@bpspoleto.it) e Università LUISS Guido Carli (igianfrancesco@luiss.it). Anche se il lavoro è frutto di riflessioni condivise i paragrafi 1 e 2.4. sono da attribuire a Igor Gianfrancesco, i paragrafi 2.1, 2.2 e 2.3 a Domenico Curcio. L'introduzione e i paragrafi 3.1 e 3.2 a entrambi gli autori. Le opinioni espresse dagli autori sono personali e non impegnano in alcun modo le rispettive Istituzioni di appartenenza.

influenzare tanto il risultato reddituale di una banca quanto il valore economico del suo patrimonio. L'esistenza di questo duplice effetto ha dato origine a due differenti approcci per la misurazione e la gestione dell'esposizione di una banca al rischio in questione: la "prospettiva degli utili" e la "prospettiva del valore economico". I due approcci, tra loro complementari e non alternativi, analizzano gli effetti delle variazioni dei tassi di interesse su una determinata variabile obiettivo, che è rappresentata dal margine di interesse nella "prospettiva degli utili" e dal valore economico del portafoglio di attività e passività finanziarie detenute da una banca nella "prospettiva del valore economico".

Il Comitato di Basilea ha ritenuto opportuno inserire il rischio di tasso di interesse del banking book nel II pilastro dell'Accordo non prevedendo, quindi, un esplicito requisito patrimoniale<sup>3</sup>. L'Organismo di vigilanza internazionale ha preso in considerazione solo la prospettiva del valore economico e, inoltre, ha definito i criteri metodologici per il calcolo di un indicatore semplificato di rischio finalizzato ad individuare le cosiddette banche "anomale", ovvero gli intermediari che presentano una variazione del valore economico del patrimonio, a seguito di un ipotizzato shock della struttura per scadenza, superiore al 20% del patrimonio di vigilanza.<sup>4</sup> La metodologia proposta dal Comitato di Basilea prevede precise regole per la ripartizione delle attività e delle passività sensibili a variazioni dei tassi di interesse in apposite fasce temporali a cui è associato un parametro di duration coincidente con la scadenza mediana della fascia. Il Comitato di Basilea ha, inoltre, emanato una serie di principi relativi alla misurazione e gestione del rischio in questione<sup>5</sup>. La Banca d'Italia ha recepito tali indicazioni introducendo, nelle Nuove disposizioni di Vigilanza Prudenziale (Circolare n.263 del 27 dicembre 2006), la c.d. "Metodologia Semplificata", che è stata recentemente oggetto di modifiche con l'aggiornamento del 27 dicembre 2010. Infine, in tempi ancora più recenti il Comitato ha, fornito una overview delle best practices adottate dai grandi gruppi bancari per il calcolo del capitale economico associato ai vari rischi, tra i quali anche il rischio di tasso del banking book, presentando le alternative tecniche possibili, le problematiche di ciascuna di esse e le procedure poste in essere per il superamento di tali criticità<sup>6</sup>.

Gli studi sull'esposizione delle banche al rischio di tasso di interesse si sono sviluppati lungo due fondamentali direttrici: la prima è costituita dalla letteratura che analizza l'impatto delle manovre di politica monetaria sull'intermediazione finanziaria e dalle ricerche che studiano lo svolgersi, per il tramite dei bilanci bancari, del meccanismo di transizione degli impulsi che dall'economia finanziaria si propagano all'economia reale. La seconda direttrice di ricerca, invece, è alimentata dagli studi che, con finalità più propriamente gestionali, hanno proposto misure per quantificare l'esposizione delle banche al rischio di tasso, tema centrale tanto a livello micro, per gli intermediari, che a livello macro, per i regulators, nella prospettiva della stabilità del sistema finanziario. Le analisi effettuate si basano sui dati contabili delle banche, così come la stessa metodologia di calcolo proposta da Basel Committee on Banking Supervision (2004) e il modello EVM (Economic Value Model) utilizzato dalla Federal Reserve [descritto in Houghton and Embert (1991), e, successivamente, analizzato da Wright e Houghton (1996) e Sierra e Yeager (2004)]. In questo filone di ricerca si inseriscono i contributi di Fiori e Iannotti (2006) e Entrop et al. (2009), che analizzano la robustezza del framework metodologico proposto da Basilea II per la misurazione del rischio di tasso di interesse del banking book: i primi studiano un campione di 18 banche italiane, i secondi analizzano un'ipotetica banca media rappresentativa dell'intero sistema bancario tedesco.

Questo articolo si propone l'obiettivo di testare la robustezza metodologica del framework regolamentare della metodologia semplificata di Basilea 2, in linea con gli studi di Fiori e Iannotti (2006) e Entrop et al. (2009). Per fare questo l'indicatore di rischio è calcolato non solo in corrispondenza della scadenza mediana di ciascuna delle 14 fasce temporali in cui classificare le voci del bilancio bancario, ma anche in corrispondenza dei rispettivi estremi. Inoltre, ai fini del calcolo della esposizione al rischio, alla duration modificata approssimata fornita dalle Autorità di vigilanza si affianca un indicatore di key rate duration, che risente della struttura per scadenza dei tassi di interesse vigente al momento della valutazione. Infine, viene analizzato l'impatto delle recenti modifiche in merito alla distribuzione dei depositi introdotte dalla Banca d'Italia con l'aggiornamento del 27 dicembre 2010. L'analisi evidenzia che sono le ipotesi relative alla distribuzione delle poste a vista più che i diversi approcci matematici usati ad avere il maggiore impatto sull'indicatore di rischio. Questo apre nuovi scenari di ricerca in merito alla corretta collocazione dei depositi a vista nelle fasce temporali al fine di una più efficace e precisa misurazione del rischio e della conseguente stima del capitale economico associato al rischio in questione.

Il resto del lavoro è così suddiviso: il paragrafo 1 descrive sinteticamente gli strumenti matematico-statistici usati nel corso della trattazione per misurare l'esposizione al rischio di tasso di interesse del banking book; nel paragrafo 2 viene fornito un quadro dell'architettura regolamentare di vigilanza; il paragrafo 3 presenta una proposta di affinamento della metodologia semplificata prevista dal Comitato di Basilea basata sul concetto di key rate duration; il paragrafo 4 conclude descrivendo le evidenze circa l'esposizione al rischio di tasso del portafoglio bancario di un campione di banche italiane.

<sup>3</sup> Cfr. Basel Committee on Banking Supervision (2006).

<sup>4</sup> Cfr. Basel Committee on Banking Supervision (2004).

<sup>5</sup> Tali principi riguardano i seguenti profili: supervisione del rischio da parte del CDA e del senior management, adeguatezza delle politiche e procedure di *risk management*, funzioni di misura, monitoraggio e controllo del rischio, controlli interni, informazioni alle Autorità di Vigilanza, adeguatezza del capitale, *market disclosure* relativa al rischio di interesse e trattamento regolamentare del rischio di interesse del *banking book*. Per un approfondimento si veda Basel Committee on Banking Supervision (2004).

<sup>6</sup> Cfr. Basel Committee on Banking Supervision (2008).

## 1. Il framework quantitativo di riferimento per l'analisi dell'esposizione al rischio di tasso di interesse del banking book

Il valore di mercato di uno strumento finanziario a tasso fisso e scadenza determinata può essere calcolato mediante la seguente relazione:

$$P = \sum_{k=1}^n x_k \cdot (1+y)^{-k} \quad (1.)$$

dove con  $x_k$  si indica il flusso di cassa relativo alla scadenza  $k$ -esima e con  $y$  un tasso di valutazione costante per ogni scadenza ( $k=1, \dots, n$ ). La variazione del valore di mercato a seguito di una data variazione  $\Delta y$  del tasso di valutazione può essere approssimata mediante il differenziale della funzione. Dopo semplici passaggi matematici si ottiene:

$$\Delta P \cong -\frac{D}{(1+y)} \cdot P \cdot \Delta y \Rightarrow \Delta P \cong -DM \cdot P \cdot \Delta y \quad (2.)$$

dove  $D$  e  $DM$  rappresentano, rispettivamente, la duration e la duration modifica dello strumento finanziario in questione. In simboli:

$$D = \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{\frac{x_k}{(1+y)^k}}{P} \quad DM = \frac{D}{1+y}$$

La (1.) calcola il valore di mercato di uno strumento finanziario a tasso fisso e scadenza determinata utilizzando un unico tasso di valutazione costante per ogni scadenza. Modelli di valutazione più rigorosi associano ad ogni scadenza uno specifico tasso di valutazione.

In tal caso ogni singolo strumento finanziario viene suddiviso in tanti zero coupon quanti sono i flussi che lo compongono e ciascun flusso viene, successivamente, attualizzato in base al tasso di valutazione relativo alla scadenza corrispondente. In termini analitici, il valore di mercato dello strumento finanziario oggetto di analisi può essere, quindi, riformulato nel modo seguente:

$$P = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{[1+r(0,k)]^k} \quad (3.)$$

dove  $r(0,k)$  rappresenta il tasso di valutazione associato al tempo  $k$ . I due modelli di valutazione descritti differiscono non solo da un punto di vista economico, ma anche da un punto di vista matematico: la (1.) è infatti una funzione ad una variabile, che lega il valore di mercato (variabile dipendente) ad una solo tasso di valutazione (variabile indipendente); la (3.) è, invece, una funzione a più variabili, che lega il valore di mercato (variabile dipendente) ai tassi di valutazione associati alle varie scadenze (variabili indipendenti). I modelli di valutazione descritti dalla (3) si basano, inoltre, sulla scelta di un limitato numero di nodi della struttura per scadenza (i c.d. key rate) e su tecniche di mapping, che consentono di ricondurre a tali nodi la complessa struttura dei flussi di cassa associati al portafoglio bancario. Ciò può avvenire sia aggregando in base a specifici criteri i vari flussi di cassa in fasce temporali, sia utilizzando determinate metodologie quantitative, quali il clumping o la price-volatility, che consentono di preservare le proprietà finanziarie dei flussi stessi.

La variazione del valore di mercato dello strumento finanziario in questione a seguito di una data variazione del tasso di valutazione relativo alla  $k$ -esima scadenza può essere approssimata mediante il calcolo del differenziale parziale. In simboli:

$$\Delta P \cong \frac{\partial P}{\partial r(0,k)} \cdot \Delta r(0,k) \quad (4.)$$

dove il termine  $\frac{\partial P}{\partial r(0,k)}$  indica la derivata parziale della funzione prezzo rispetto al tasso di valutazione associato alla scadenza  $k$ -esima. Il calcolo della derivata parziale risulta pari a:

$$\frac{\partial P}{\partial r(0,k)} = -k \cdot x_k \cdot [1+r(0,k)]^{-(k+1)} \quad (5.)$$

sostituendo la (5.) nella (4.) si ottiene:

$$\Delta P \cong -k \cdot x_k \cdot [1+r(0,k)]^{-(k+1)} \cdot \Delta r(0,k) \Rightarrow \frac{\Delta P}{P} \cong -k \cdot \underbrace{\frac{x_k \cdot [1+r(0,k)]^{-(k+1)}}{P}}_{DURATION PARZIALE} \cdot \Delta r(0,k) \quad (6.)$$

Il termine indicato dalla parentesi è detto duration parziale e rappresenta una misura della sensibilità della variazione del valore di mercato a seguito di una data variazione del tasso di valutazione relativo alla scadenza k-esima<sup>7</sup>. Le duration parziali possono essere utilizzate sia singolarmente, per valutare l'impatto di uno specifico tasso di valutazione sul valore di mercato, sia nel loro complesso, per valutare la variazione del valore di mercato a seguito di uno spostamento dell'intera struttura dei tassi utilizzati. In questo secondo caso, la variazione del valore può essere approssimata mediante il differenziale totale della funzione. In termini analitici si ha:

$$\Delta P \cong \frac{\partial P}{\partial r(0,1)} \cdot \Delta r(0,1) + \dots + \frac{\partial P}{\partial r(0,k)} \cdot \Delta r(0,k) + \dots + \frac{\partial P}{\partial r(0,n)} \cdot \Delta r(0,n) \quad (7.)$$

dalla quale, dopo semplici passaggi matematici si ottiene:

$$\Delta P \cong -D_1 \cdot P \cdot \Delta r(0,1) - \dots - D_k \cdot P \cdot \Delta r(0,k) - \dots - D_n \cdot P \cdot \Delta r(0,n) \quad (8.)$$

dove:

- $D_1$ ,  $D_k$  e  $D_n$  indicano, rispettivamente, le duration parziali relative alle scadenze 1, k ed n.
- $\Delta r(0,1)$ ,  $\Delta r(0,k)$  e  $\Delta r(0,n)$  indicano, rispettivamente, le variazioni relative al tassi di valutazione riferiti ai tempi 1, k ed n.

## 2. La misurazione dell'esposizione della banca al rischio di tasso di interesse del banking book secondo la disciplina di vigilanza prudenziale

Il rischio di tasso di interesse del banking book è disciplinato nel secondo pilastro dell'Accordo di Basilea 2. Il regulator internazionale non ha previsto alcun esplicito requisito patrimoniale a fronte di tale rischio ma ha fornito precise indicazioni circa le modalità di calcolo del capitale interno ad esso relativo.

Come noto, in virtù del principio di proporzionalità, le banche sono state suddivise in tre classi e le metodologie da utilizzare differiscono a seconda della classe di appartenenza. In particolare, le banche rientranti nella classe 3 possono misurare il rischio di tasso di interesse del banking book mediante la metodologia semplificata (di cui all'Allegato C del Titolo III – Capitolo 1 delle Disposizioni di Vigilanza della Banca d'Italia), le banche di classe 2 valutano l'opportunità di affinare la metodologia semplificata; infine, le banche di classe 1 definiscono in piena autonomia le metodologie di misurazione più adeguate ai fini della determinazione del capitale interno. In relazione a queste ultime, inoltre, la Banca d'Italia si attende l'utilizzo di modelli VaR anche mediante affinamenti della metodologia semplificata.

### 2.1. La classificazione delle attività e passività sensibili

La metodologia semplificata prevede la classificazione delle attività e delle passività sensibili ai tassi di interesse, rilevate ai valori contabili, in una matrice per scadenza composta da 14 fasce temporali, riportata nella seguente tabella 1.

Tabella 1. Metodologia semplificata: fattori di ponderazione per lo scenario parallelo di +200 bps

Fascia temporale	Scadenza mediana per fascia	Duration modificata approssimata (A)	Shock di tasso ipotizzato (B)	Fattore di ponderazione C=A*B
A vista fino a revoca	0	0	200 punti base	0,00%
Fino a 1 mese	0,5 mesi	0,04 anni	200 punti base	0,08%
Da oltre 1 mese a 3 mesi	2 mesi	0,16 anni	200 punti base	0,32%
Da oltre 3 mesi a 6 mesi	4,5 mesi	0,36 anni	200 punti base	0,72%
Da oltre 6 mesi a 1 anno	9 mesi	0,71 anni	200 punti base	1,43%
Da oltre 1 anno a 2 anni	1,5 anni	1,38 anni	200 punti base	2,77%
Da oltre 2 anni a 3 anni	2,5 anni	2,25 anni	200 punti base	4,49%
Da oltre 3 anni a 4 anni	3,5 anni	3,07 anni	200 punti base	6,14%
Da oltre 4 anni a 5 anni	4,5 anni	3,85 anni	200 punti base	7,71%
Da oltre 5 anni a 7 anni	6 anni	5,08 anni	200 punti base	10,15%
Da oltre 7 anni a 10 anni	8,5 anni	6,63 anni	200 punti base	13,26%
Da oltre 10 anni a 15 anni	12,5 anni	8,92 anni	200 punti base	17,84%
Da oltre 15 anni a 20 anni	17,5 anni	11,21 anni	200 punti base	22,43%
Oltre i 20 anni	22,5 anni	13,01 anni	200 punti base	26,03%

Fonte: Banca d'Italia (2006).

<sup>7</sup> Cfr. Ho (1992).

L'assegnazione delle poste di bilancio alle varie fasce temporali va effettuata per ogni singola valuta rilevante e per l'aggregato delle valute non rilevanti. Si definiscono rilevanti le valute che rappresentano una quota superiore al 5% del totale attivo o passivo del portafoglio bancario. Ai fini dell'implementazione del modello di calcolo previsto dal Comitato, quindi, le valute rilevanti sono considerate in matrici per scadenza separate, mentre le posizioni in valute non rilevanti possono essere tra loro aggregate in un'unica matrice.

Le attività e le passività a tasso fisso sono classificate nelle varie fasce temporali in base alla vita residua, mentre quelle a tasso variabile in base al periodo mancante alla data più prossima di riprezzamento. Fatto salvo quanto disposto per specifiche poste contabili dalle Nuove Disposizioni di Vigilanza Prudenziale, le attività e passività vanno inserite nella matrice per scadenza sulla base dei criteri previsti nella Circolare n.272 "Manuale per la compilazione della matrice dei conti" e nella Circolare n.115 "Istruzioni per la compilazione delle segnalazioni di vigilanza su base consolidata degli enti creditizi" a cui si rimanda per un approfondimento.

Sulla base delle modifiche recentemente apportate, i c/c attivi sono classificati nella fascia "a vista", mentre la somma dei c/c passivi e dei depositi liberi è da ripartire secondo le seguente indicazioni:

- nella fascia "a vista" per una quota fissa del 25%, che corrisponde alla c.d. componente "non core";
- per il rimanente importo (la c.d. "componente core") nelle successive otto fasce temporali (da "fino a 1 mese" a "4-5 anni") in misura proporzionale al numero di mesi in esse contenute. Ad esempio, nella fascia "fino a 1 mese" va inserito 1/60 dell'importo, in quella "da oltre 1 mese fino a 3 mesi" vanno inseriti i 2/60 dell'importo e così via.

Prima delle modifiche era adottato, invece, un differente criterio secondo cui i c/c passivi e i depositi liberi erano ripartiti nella fascia "a vista" per un ammontare pari a quello dei c/c attivi. Il rimanente importo veniva, invece, attribuito alle successive quattro fasce temporali in misura proporzionale al numero dei mesi in esse contenute. Ad esempio, nella fascia "fino ad un mese" andava inserito 1/12 dell'importo rimanente, nella fascia "da oltre 1 mese a 3 mesi" i 2/12 dell'importo rimanente, e così via. Le modifiche apportate, inoltre, stabiliscono che:

- per quanto riguarda i c/c attivi, non devono essere classificati nella fascia "a vista" i rapporti formalmente regolati come conti correnti, ma riconducibili ad altre forme di impiego aventi uno specifico profilo temporale, come, ad esempio, gli anticipi s.b.f.;
- con riferimento alle modalità di ripartizione dei c/c passivi e dei depositi liberi, le banche di classe 1 e 2 valutano l'opportunità di affinare il criterio precedentemente illustrato relativo alla stima della quota stabile (c.d. "componente core") e alla sua, successiva, ripartizione nelle fasce fino ad un massimo di 5 anni;
- inoltre, con riferimento alla facoltà di rimborso anticipato (c.d. "prepayment risk") le banche di classe 1 e 2 valutano l'opportunità di rappresentare tale rischio secondo modalità alternative rispetto alla normativa segnaletica ("delta equivalent value")

Le modifiche apportate sulla distribuzione dei depositi cambiano radicalmente la struttura per scadenza delle banche innescando i presupposti per la determinazione di gap negativi nell'orizzonte temporale tra 1 e 5 anni con un significativo impatto sul relativo indicatore di rischiosità come vedremo nel prosieguo della trattazione.

## 2.2. La determinazione della posizione finanziaria netta e il calcolo dell'indicatore di rischio

Per ognuna delle 14 fasce temporali viste sopra la banca determina una posizione netta compensando le posizioni attive con quelle passive. La posizione netta viene poi moltiplicata per i fattori di ponderazione, illustrati nell'ultima colonna della tabella 1, calcolati per il caso di applicazione dello scenario di shift parallelo della curva dei tassi di +200 punti base, uguale per tutte le scadenze.

Quanto detto, in corrispondenza della *j*-esima valuta rilevante ( $j=1, \dots, k$ ), può essere espresso in termini analitici nel modo seguente:

$$\Delta PN_i = PN_i \cdot DM_i \cdot \Delta r \quad (9.)$$

dove:

- $\Delta PN_i$  è la stima della variazione subita dal valore economico della posizione netta relativa alla *i*-esima fascia temporale;
- $PN_i$  è il valore economico della posizione netta relativa *i*-esima fascia,
- $DM_i$  è la duration modificata associata alla fascia *i*-esima;
- $\Delta r$  è la variazione del tasso di interesse ipotizzata pari a 200 punti base e uguale per tutte le fasce temporali.

La (9.) è sostanzialmente analoga, dal punto di vista concettuale, alla (2.). L'unica differenza è che nella (9.) non compare il segno meno nel membro di destra dell'equazione. Di conseguenza, un valore positivo di  $\Delta PN_i$  corrisponde a una riduzione di pari importo del valore economico della posizione netta *i*-esima e viceversa.

Le variazioni del valore economico delle posizioni nette, ottenute in corrispondenza di ogni singola fascia temporale, sono successivamente sommate tra loro, al fine di ottenere una stima della variazione del valore economico del portafoglio di attività e passività finanziarie denominate in una data valuta ( $\Delta VE_j$ ) a seguito dello shock di tasso ipotizzato. In termini analitici, in relazione alla *j*-esima valuta rilevante ( $j=1, \dots, k$ ), si ha:

$$\Delta VE_j = \sum_{i=1}^{14} \Delta PN_i \quad (10.)$$

Le variazioni del valore economico relative alle singole valute rilevanti e all'aggregato delle valute non rilevanti sono, successivamente, sommate tra loro, se positive, al fine di ottenere un valore che rappresenta la variazione di valore economico del portafoglio bancario ( $\Delta VE_p$ ), a seguito dello shock di tasso di interesse ipotizzato. In simboli:

$$\Delta VE_p = \sum_{j=1}^k \Delta VE_j + \Delta VE_q \quad (11.) \quad \text{con} \quad \Delta VE_j > 0, \Delta VE_q > 0$$

dove:  $\Delta VE_j$  e  $\Delta VE_q$  rappresentano, rispettivamente, il valore assoluto della variazione del valore economico relativo alla  $j$ -esima valuta rilevante e all'aggregato delle valute non rilevanti.

Si sottolinea che ai fini del calcolo della (11.) vengono considerate le sole variazioni positive, che corrispondono, per costruzione, a riduzioni di valore economico del patrimonio a seguito dello shock di tasso ipotizzato. Non viene, quindi, ammessa la compensazione tra le esposizioni nelle diverse valute. Prima delle recenti modifiche la stima della variazione del valore economico del portafoglio bancario era calcolato sommando i valori assoluti delle variazioni del valore economico relative alle singole valute rilevanti e all'aggregato delle valute non rilevanti.

L'utilizzo dei valori assoluti era giustificato da ragioni prudenziali in quanto equivaleva a ipotizzare che in corrispondenza di ogni valuta rilevante e dell'aggregato delle valute non rilevanti si avesse una riduzione del valore economico del portafoglio bancario, a prescindere dall'effettivo segno ottenuto mediante l'applicazione della (10.) alle singole valute rilevanti e all'aggregato delle valute non rilevanti.

Il risultato ottenuto tramite la (11.) è, di conseguenza, in base ai criteri metodologici applicati, sempre di segno positivo, ma rappresenta, come detto, una riduzione del valore economico del portafoglio di attività e passività finanziarie detenute da una banca. Tale valore viene, infine, rapportato al patrimonio di vigilanza ottenendo un indice di rischiosità, la cui soglia di attenzione è fissata al 20%. In termini analitici, deve essere verificata la seguente relazione:

$$\frac{\Delta VE_p}{PV} \leq 20\% \quad (12.)$$

dove con  $\Delta VE_p$  e  $PV$  si indicano, rispettivamente, la variazione del valore economico del portafoglio bancario e l'ammontare del patrimonio di vigilanza.

In particolare, tutte le banche, indipendentemente dalla classe di appartenenza, dalla metodologia utilizzata e dalle variazioni stimate/scenari prescelti per calcolare il capitale interno in condizioni ordinarie/di stress, valutano l'impatto di una variazione ipotetica dei tassi pari a +/- 200 punti base sull'esposizione al rischio di tasso di interesse del portafoglio bancario. Nel caso in cui si determini una riduzione del valore economico della banca superiore al 20% del patrimonio di vigilanza, la Banca d'Italia approfondisce con la banca i risultati e si riserva di adottare opportuni interventi.

Concludiamo precisando che le recenti modifiche alle Nuove disposizioni di Vigilanza prudenziale, recependo quanto riportato nel documento *Principles for Management and Supervision of Interest Rate Risk* del 2004, stabiliscono che, ai fini del calcolo dell'indicatore di rischiosità per la determinazione del capitale interno in condizioni di operatività ordinaria, le banche possono fare riferimento alle variazioni annuali dei tassi di interesse registrati lungo un periodo di 6 anni, considerando alternativamente il 1<sup>o</sup> (ribasso) o il 99<sup>o</sup> percentile (rialzo). Inoltre, il regulator internazionale ha indicato che l'orizzonte temporale sulla base del quale misurare il rischio di tasso di interesse del banking book è di un anno<sup>8</sup>. Un periodo di osservazione di 6 anni consente mediante la c.d. tecnica delle "osservazioni sovrapposte" di ottenere una serie storica di cinque anni di variazioni calcolate su base annua. Ad esempio se consideriamo un periodo di osservazione di 6 anni che va dal 1 gennaio 2004 al 31 dicembre 2009, la prima osservazione della serie storica di 5 anni di variazioni è calcolata sottraendo alla struttura dei tassi in essere al primo giorno lavorativo del 2005 quella corrispondente al primo giorno lavorativo del 2004 e così via.

Gli scenari così ottenuti devono essere corretti al fine di salvaguardare il c.d. "vincolo di non negatività" rispetto alla struttura per scadenza vigente al momento della valutazione, così come disposto dalle recenti modifiche al quadro regolamentare di vigilanza. Nelle nostre elaborazioni la soglia minima è stata fissata sia a zero, per simulare uno scenario di mercati stressati, sia al livello minimo registrato dal tasso associato ad un particolare nodo della struttura per scadenza negli ultimi sei anni, per rappresentare condizioni normali dei mercati finanziari. Successivamente, è stato calcolato un indice di rischiosità sulla base dei vari scenari simulati. Si ottiene, in tal modo, una distribuzione degli indicatori di rischiosità, che viene tagliata in corrispondenza dei percentili indicati dalle Autorità di Vigilanza. La seguente tabella riassume quanto disposto dal quadro regolamentare di vigilanza per l'implementazione di sistemi di misurazione del rischio e degli stress test a seconda della classe di appartenenza degli intermediari.

<sup>8</sup> Cfr. Basel Committee on Banking Supervision (2004), pag.36.

Tabella 2. Sistemi di misurazione e prove di stress

	BANCHE		
	classe 1	classe 2	classe 3
SISTEMI DI MISURAZIONE DEL RISCHIO	Definiscono in piena autonomia le metodologie più adeguate.  La Banca d'Italia si attende, inoltre, l'utilizzo di modelli VAR, anche mediante affinamenti della metodologia semplificata	Valutano la possibilità di affinare la metodologia semplificata	Fanno riferimento agli algoritmi semplificati proposti nell'allegato C (titolo III – Capitolo 1 delle Nuove disposizioni di Vigilanza prudenziale)
	Le banche di classe 1 e 2 con riferimento alle modalità di ripartizione dei c/c passivi e dei depositi liberi valutano l'opportunità di affinare le ipotesi semplificatrici di cui all'Allegato C relative alla stima della quota stabile (c.d. "componente core") e alla sua ripartizione nelle fasce fino a un massimo di 5 anni. Inoltre, con riferimento alle facoltà di rimborso anticipato (c.d. "prepayment risk") valutano l'opportunità di rappresentare tale rischio secondo modalità alternative alla normativa segnaletica ("delta equivalent value")		
PROVE DI STRESS	Effettuano una combinazione delle tecniche di analisi di sensitività e di analisi di scenario. Queste ultime con una più ampia copertura tra linee di prodotto e aree geografiche	Effettuano analisi di sensitività rispetto a fattori di rischio autonomamente identificati e considerati rilevanti	
	Le prove di stress devono considerare gli spostamenti non paralleli della curva dei rendimenti e le differenti volatilità dei tassi alle varie scadenze		

### 2.3. I coefficienti di duration forniti dall'Autorità di Vigilanza: un approfondimento

Le duration modificate approssimate della precedente tabella 1 sono indicatori della sensibilità del valore economico di una posizione classificata in una specifica fascia alle variazioni del tasso di interesse. Tali duration, tuttavia, non riflettono né l'effettiva struttura per scadenza dei tassi di interesse vigenti al momento della valutazione, né l'effettiva composizione del portafoglio bancario.

In particolare, le duration modificate che la tabella 1 associa alle fasce temporali con scadenze inferiori o uguali a un anno sono le duration modificate attribuibili a uno zero-coupon bond avente scadenza nel punto medio della relativa fascia temporale e tasso di valutazione del 5%. Per le fasce temporali superiori all'anno, invece, si tratta delle duration modificate attribuibili a un titolo obbligazionario a tasso fisso avente scadenza nel punto medio della relativa fascia temporale con tasso cedolare e tasso di valutazione entrambi del 5%. In altri termini, si ipotizza una struttura per scadenza piatta del 5%.

A titolo esemplificativo, la seguente tabella descrive il calcolo della duration associata alla fascia temporale "da oltre 4 anni a 5 anni".

Tabella 3. Calcolo della duration associata alla fascia temporale "da oltre 4 anni a 5 anni"

Scadenze (in anni)	Flussi cedolari (A)	Fattore di sconto (1+5%) <sup>t</sup> (B)	Flussi attualizzati $C_i = A_i \times B_i$	Pesi $D_i = \frac{C_i}{\sum_i C_i}$	$C_i \times D_i$
0,5	5	0,98	4,88	0,05	0,02
1,5	5	0,93	4,65	0,05	0,07
2,5	5	0,89	4,43	0,04	0,11
3,5	5	0,84	4,22	0,04	0,14
4,5	105	0,80	84,30	0,82	3,70
			102,47	1	4,05
duration	4,05				
duration modificata	3,85				

## 2.4. Una proposta di affinamento della metodologia semplificata basata sul concetto di duration parziale

In questa sezione si ipotizza di sostituire i parametri di duration approssimata indicati dalla vigilanza con le duration parziali calcolate sulla base dei tassi di valutazione associati alle varie scadenze della struttura a termine dei tassi di interesse, e rappresentati dai tassi Euribor, per le scadenze inferiori all'anno, e dai tassi swap per quelle uguali o superiori ai 12 mesi. La variazione di valore economico della posizione netta associata ad ogni fascia temporale può, quindi, essere calcolata mediante il framework concettuale della (6.). In tal caso la (9.) diventa:

$$\Delta PN_i = PN_i \cdot \underbrace{k \cdot [1 + r(0, k)]^{-(k+1)}} \cdot \Delta r \quad (13.)$$

dove il coefficiente indicato con la parentesi graffa sostituisce il parametro di duration approssimata fornito dalle disposizioni di vigilanza. La tabella 4 riporta le stime di tale coefficiente in corrispondenza delle scadenze mediane della varie fasce temporali, calcolate con la struttura per scadenza vigente al 31/12 dei vari anni considerati nell'esercizio. L'analisi dei dati evidenzia, per le scadenze brevi, la presenza di coefficienti di duration parziali tendenzialmente di poco superiori rispetto a quelli forniti dalle Autorità di Vigilanza e sistematicamente più bassi, invece, per le scadenze più lunghe.

Tabella 4. Proposta metodologia basata sul concetto di duration parziale

Fascia temporale	Scadenza mediana per fascia	Duration modificata approssimata	Coefficienti basati sul concetto di duration parziale (*)						
			2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
A vista e revoca									
fino a 1 mese	0,5 mesi	0,04	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08
da oltre 1 mese a 3 mesi	2 mesi	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,17
da oltre 3 mese a 6 mesi	4,5 mesi	0,36	0,36	0,36	0,36	0,36	0,36	0,35	0,37
da oltre 6 mese a 1 anno	9 mesi	0,71	0,72	0,72	0,72	0,70	0,69	0,71	0,74
da oltre 1 anno a 2 anni	1,5 anni	1,38	1,41	1,41	1,39	1,36	1,34	1,40	1,44
da oltre 2 anni a 3 anni	2,5 anni	2,25	2,26	2,28	2,25	2,17	2,14	2,27	2,33
da oltre 3 anni a 4 anni	3,5 anni	3,07	3,02	3,08	3,04	2,92	2,87	3,06	3,14
da oltre 4 anni a 5 anni	4,5 anni	3,85	3,93	3,95	3,83	3,60	3,54	3,89	4,13
da oltre 5 anni a 7 anni	6 anni	5,08	4,60	4,78	4,79	4,52	4,38	4,76	4,88
da oltre 7 anni a 10 anni	8,5 anni	6,63	5,73	6,07	6,20	5,76	5,51	6,07	6,17
da oltre 10 anni a 15 anni	12,5 anni	8,92	6,83	7,44	7,80	7,14	6,64	7,51	7,54
da oltre 15 anni a 20 anni	17,5 anni	11,21	7,35	8,25	8,96	8,04	7,24	8,66	8,45
da oltre 20 anni	22,5 anni	13,01	7,26	8,40	9,47	8,35	7,29	9,44	8,86

(\*) calcolati sulla base di una struttura per scadenza composta dai tassi Euribor per le scadenze inferiori all'anno e i tassi swap per scadenze superiori o uguali all'anno. I tassi relativi alle scadenze mediane della matrice per scadenza sono calcolati mediante interpolazione lineare.

Fonte: Nostre elaborazioni su dati Datastream<sup>TM</sup>.

La tecnica di mapping adottata nell'ambito della metodologia semplificata determina, in corrispondenza di ogni fascia temporale, una compensazione tra le varie posizioni attive e passive, facendo venir meno la memoria storica della effettiva data di scadenza o di riprezzamento. In aggiunta noi proponiamo il calcolo delle duration approssimate e parziali, associate agli estremi inferiori e superiori delle varie fasce temporali, al fine di fornire una valutazione dell'effettivo scostamento della stima dell'indicatore di rischio derivante dal diverso posizionamento delle poste di bilancio nell'ambito delle varie fasce temporali. La tabella 5 riporta le duration approssimate e parziali relative alla scadenza mediana e agli estremi inferiori e superiori delle varie fasce temporali calcolati sulla base della struttura per scadenza dei tassi di valutazione vigente al 31/12/2009.

Tabella 5. Duration approssimate e parziali associate agli estremi inferiori e superiori delle fasce temporali

Fascia temporale	Duration approssimata			Duration parziale (*)		
	estremo inferiore	scadenza mediana	estremo superiore	estremo inferiore	scadenza mediana	estremo superiore
a vista e fino a revoca						
fino a 1 mese	0,00	0,04	0,08	0,00	0,04	0,08
da oltre 1 mese a 3 mesi	0,08	0,16	0,24	0,08	0,17	0,25
da oltre 3 mesi a 6 mesi	0,24	0,36	0,48	0,25	0,37	0,49
da oltre 6 mesi a 1 anno	0,48	0,71	0,95	0,49	0,74	0,97
da oltre 1 anno a 2 anni	0,95	1,38	1,86	0,97	1,44	1,89
da oltre 2 anni a 3 anni	1,86	2,25	2,72	1,89	2,33	2,74
da oltre 3 anni a 4 anni	2,72	3,07	3,55	2,74	3,14	3,53
da oltre 4 anni a 5 anni	3,55	3,85	4,33	3,53	3,89	4,24
da oltre 5 anni a 7 anni	4,33	5,08	5,79	4,24	4,88	5,44
da oltre 7 anni a 10 anni	5,79	6,63	7,72	5,44	6,17	6,78
da oltre 10 anni a 15 anni	7,72	8,92	10,38	6,78	7,54	8,05
da oltre 15 anni a 20 anni	10,38	11,21	12,46	8,05	8,45	8,65
oltre i 20 anni	12,46	13,01	13,81	8,65	8,86	8,97

(\*) calcolati sulla base di una struttura per scadenza composta dai tassi Euribor per le scadenze inferiori all'anno e i tassi swap per scadenze superiori o uguali all'anno. I tassi relativi alle scadenze mediane della matrice per scadenza sono calcolati mediante interpolazione lineare.

Fonte: Nostre Elaborazioni su dati Datastream<sup>TM</sup>.

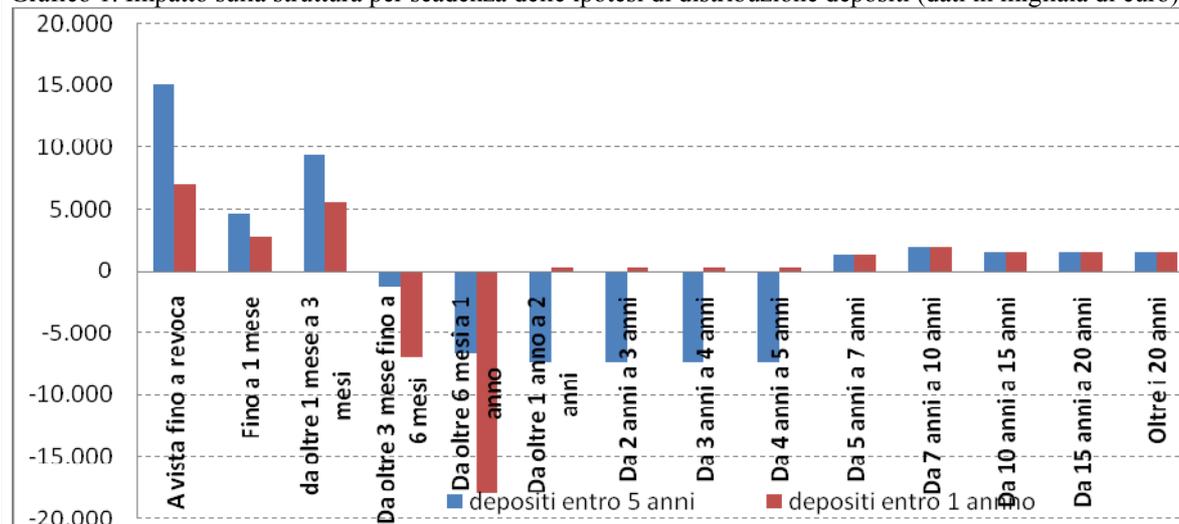
### 3. L'esposizione al rischio di tasso del portafoglio bancario: evidenze da un campione di banche italiane

#### 3.1. Dati e ipotesi alla base dello studio

La metodologia standardizzata e le simulazioni storiche, basate sia sul concetto di duration approssimata sia su quello di key-rate duration sono state applicate alla struttura per scadenza di un'ipotetica banca determinata aggregando i dati relativi all'esposizione al rischio di tasso del banking book di un campione di 15 banche commerciali italiane di piccola e media dimensione, rientranti nelle classi 2 e 3 previste dalle Nuove Disposizioni di Vigilanza Prudenziale di Banca d'Italia. La fonte delle informazioni quantitative sull'esposizione delle banche è la matrice che contiene la distribuzione, per durata residua e per data di riprezzamento, delle attività e passività finanziarie, disponibile nella parte E della Nota Integrativa di Bilancio "Informazioni sui rischi e sulle relative politiche di copertura". I dati di bilancio utilizzati sono quelli relativi al 31/12/2009. La matrice desumibile dal bilancio di esercizio presenta, tuttavia, un numero di fasce inferiori e di maggiore ampiezza rispetto a quanto previsto dalla metodologia semplificata<sup>9</sup>. Ai fini del calcolo dell'indice di rischio si è ipotizzata, nel passaggio da una matrice all'altra, una distribuzione delle poste di bilancio proporzionale al numero dei mesi contenuti nelle varie fasce temporali. Ad esempio, le poste di bilancio ricomprese nella fascia "fino a 3 mesi" della matrice di bilancio sono state ridistribuite per 1/3 nella fascia "fino a 1 mese" e per 2/3 nella fascia "da oltre 1 mese fino a 3 mesi" della matrice adottata nell'ambito della metodologia semplificata. I tassi di interesse utilizzati ai fini della valutazione sono rappresentati dai tassi Euribor per le scadenze inferiori a un anno e dai tassi Swap per le scadenze uguali o superiori a 1 anno (fonte Datastream<sup>TM</sup>). I tassi relativi a scadenze non disponibili sono stati ricavati mediante interpolazione lineare. Le valutazioni sono state effettuate sulla base della struttura per scadenza vigente al 31/12/2009 e al 31/12/2006.

La componente delle poste a vista è stata distribuita secondo quanto previsto dalle disposizioni delle Autorità di Vigilanza prima e dopo le modifiche dello scorso dicembre, al fine di analizzarne l'impatto. Le diverse ipotesi di distribuzione dei depositi incidono in maniera significativa sulla struttura per scadenza delle banche, come si evince dal grafico 1, costruito sulle informazioni desunte dai bilanci 2009. La distribuzione dei depositi entro 1 anno comporta un gap positivo nella fascia a vista e dei gap negativi nelle fasce "da oltre 3 mesi a 6 mesi" e "da oltre 6 mesi a 1 anno". Nel caso di distribuzione entro i 5 anni, così come previsto dalle modifiche dello scorso dicembre, si evidenziano non solo gap negativi nelle fasce sopra citate, anche se di minore entità, ma anche gap negativi nelle fasce temporali comprese tra 1 a 5 anni, con evidenti ripercussioni sull'esposizione della banca a shock della struttura per scadenza dei tassi di interesse, come descritto nel prosieguo.

Grafico 1. Impatto sulla struttura per scadenza delle ipotesi di distribuzione depositi (dati in migliaia di euro)



Fonte: Nostre Elaborazioni su dati di bilancio al 31/12/2009.

Inoltre, la stima dell'indicatore di rischio è stata effettuata non solo in corrispondenza della scadenza mediana della fascia temporale, ma anche dell'estremo inferiore e superiore della fascia stessa. Ciò, come detto nel corso della trattazione, al fine di fornire una valutazione dell'effettivo scostamento della stima dell'indicatore di rischio derivante dal diverso posizionamento delle poste di bilancio all'interno delle varie fasce temporali. L'utilizzo di differenti punti di scadenza determina una differente misura di duration approssimata o key-rate duration, come desumibile dalla tabella 5. Infine, la tabella 6 riporta i dati di sintesi relativi alla struttura per scadenza osservata al 31/12/2009 e al 31/12/2006. In corrispondenza di ciascun nodo della struttura per scadenza sono riportati i valori massimi e minimi sia dei tassi osservati, sia delle relative variazioni nonché una stima della volatilità. Le evidenze mostrano come la parte a breve e medio termine della struttura per scadenza è stata maggiormente influenzata dalle turbolenze verificatesi sui mercati finanziari. La struttura per scadenza al 31/12/2009 presenta, infatti, livelli molto bassi per la parte a breve e medio termine e, allo stesso tempo, molto vicini al livello minimo osservato negli ultimi sei anni di riferimento.

### 3.2. Risultati e considerazioni conclusive

Le evidenze empiriche ottenute, riportate nelle tabelle 7 e 8 con riferimento, rispettivamente, alle strutture per scadenza in vigore al 31/12/2009 e al 31/12/2006, evidenziano che l'esposizione al rischio della banca è influenzata più dalle assunzioni sulla distribuzione dei depositi (entro 1 anno o entro 5 anni) che dal differente posizionamento delle poste di bilancio nelle varie fasce temporali (in corrispondenza della scadenza mediana o degli estremi della singola fascia) o dal differente coefficiente di duration utilizzato (duration approssimata o key rate duration). La diversa distribuzione dei depositi modifica l'esposizione al rischio della nostra ipotetica banca. Infatti, nel caso di distribuzione dei depositi entro 1 anno, la banca è esposta al rischio di *shift* paralleli in aumento della struttura per scadenza dei tassi; viceversa, nel caso i depositi si distribuiscono entro 5 anni, la banca risulta esposta a spostamenti paralleli in diminuzione della struttura per scadenza dei tassi.

Le suddette evidenze sono spiegate dal fatto che nel caso di distribuzione dei depositi entro 5 anni si registrano, rispetto all'ipotesi di distribuzione entro 1 anno, gap negativi anche nelle fasce temporali che vanno da 1 anno a 5 anni e non solo in quelle da 3 mesi a 1 anno, in quanto le passività sensibili a variazioni dei tassi risultano maggiori delle attività sensibili. Ad esempio, nel caso della metodologia semplificata e distribuzione dei depositi entro 5 anni, a seguito di un shock positivo di 200 punti base, la riduzione del valore economico delle passività, che rappresenta un beneficio per la banca, è maggiore della riduzione del valore economico delle attività, che rappresenta, invece, una minaccia per la banca. Di conseguenza la banca registra un incremento del valore economico del patrimonio. Viceversa, nel caso di una riduzione di 200 punti base (corretta tenendo conto del vincolo di non negatività) si registra un incremento del valore economico delle passività maggiore di quello associato alle attività e una conseguente riduzione del valore economico del patrimonio.

Le dinamiche appena descritte sono alla base anche degli indicatori di rischio ottenuti mediante la metodologia delle simulazioni storiche. Il novantanovesimo percentile della distribuzione (la perdita di valore economico del patrimonio) è

<sup>9</sup> La matrice per scadenza e data di riprezzamento riportata nel Bilancio di Esercizio comprende le seguenti fasce temporali: "a vista", "fino a 3 mesi", "da oltre 3 mesi fino a 6 mesi", "da oltre 6 mesi fino a 1 anno", "da oltre 1 anno fino a 5 anni", "da oltre 5 anni fino a 10 anni", "oltre 10 anni" e "Durata indeterminata".

infatti ottenuto in corrispondenza di una variazione verso l'alto della struttura per scadenza, nel caso di distribuzione dei depositi entro 1 anno, e di variazione verso il basso, nel caso di distribuzione entro 5 anni.

Si segnala, inoltre, che alla data di valutazione del 31/12/2009 la banca che adotta la metodologia semplificata è immune da shock di tassi di interesse nell'ipotesi di distribuzione dei depositi entro 5 anni e vincolo di non negatività pari al livello minimo dei tassi osservati negli ultimi sei anni. Ciò è attribuibile al fatto che la parte a breve e medio termine struttura dei tassi vigente al 31/12/2009 è molto vicina al livello minimo osservato negli ultimi sei anni (cfr. tabella 5). In tal caso, infatti, l'incremento di valore economico delle passività derivante da uno shock verso il basso della struttura per scadenza è smorzato dall'utilizzo di variazioni molto contenute (dato il vincolo di negatività fissato) e risulta, quindi, minore, di quello associato alle attività a lungo termine. Un livello molto basso della struttura per scadenza impatta, quindi, sull'indice di rischiosità a seconda del vincolo di non negatività prescelto. Quanto detto emerge anche dalle stime ottenute con la metodologia delle simulazione storiche che sono significativamente più alte nel caso di vincolo di non negatività pari a zero. Il fenomeno appena descritto non si osserva, invece, nel 2006 dato il differente livello della struttura dei tassi.

In generale, in corrispondenza di uno specifico set di ipotesi sottostanti (distribuzione dei depositi, posizionamento delle poste di bilancio all'interno delle fasce temporali e indicatori di rischio utilizzati) le due metodologie proposte (metodologia semplificata e simulazioni storiche) conducono a risultati tra loro divergenti. Si osserva, ad esempio, che la metodologia semplificata conduce a indicatori di rischio più elevati di quelli ottenuti mediante la tecnica delle simulazioni storiche nel caso di distribuzione dei depositi entro un anno. Viceversa nel caso di distribuzione dei depositi entro cinque anni. L'eterogeneità dei risultati potrebbe essere, inoltre, amplificata dalla possibilità, per le banche di classe 1 e 2, di adottare proprie metodologie per la stima della quota stabile dei depositi e della ripartizione degli stessi nelle varie fasce temporali nonché per la modellizzazione del c.d. "prepayment risk". Ciò assume particolare rilevanza ai fini della stima del capitale interno da allocare in sede ICAAP. Secondo le attuali practices adottate dalle banche, infatti, un ammontare di capitale interno pari al prodotto tra l'indicatore di rischio e il patrimonio di vigilanza è detenuto a presidio del rischio di tasso di interesse del banking book. Al riguardo l'auspicio che le banche di classe 1 e 2 sviluppino affinamenti della metodologia semplificata potrebbe essere, da un lato, funzionale ad una più accurata determinazione del capitale interno ma, dall'altro, potrebbe determinare comportamenti opportunistici nella stima dello stesso. Allo stesso tempo, l'eterogeneità dei risultati potrebbe rendere più ardua l'individuazione delle c.d. banche "anomale" se affidata all'analisi di indicatori eterogenei. L'elaborazione da parte delle Autorità di Vigilanza di un framework quantitativo univoco basato su ipotesi più restrittive potrebbe essere non solo funzionale all'individuazione delle "banche anomale", ma anche contribuire alla misurazione ed al controllo del rischio di tasso in questione.

Tabella 6. Dati di sintesi struttura per scadenza

Dati al 31/12/2009	Fino a 1 mese	da oltre 1 mesi a 3 mesi	Da oltre 3 mesi fino a 6 mesi	Da oltre 6 mesi a 1 anno	Da oltre 1 anno a 2 anni	Da 2 anni a 3 anni	Da 3 anni a 4 anni	Da 4 anni a 5 anni	Da 5 anni a 7 anni	Da 7 anni a 10 anni	Da 10 anni a 15 anni	Da 15 anni a 20 anni	Oltre i 20 anni
Struttura per scadenza (a)	0,40	0,56	0,84	1,13	1,59	2,06	2,41	2,68	3,01	3,43	3,82	4,02	4,05
Livello max ultimi sei anni	5,04	5,25	5,42	5,48	5,49	5,45	5,34	5,25	5,16	5,10	5,12	5,12	5,09
Livello min ultimi sei anni (b)	0,36	0,56	0,84	1,12	1,37	1,84	2,20	2,48	2,74	3,01	3,29	3,44	3,23
(a) - (b)	0,03	0,00	0,00	0,01	0,22	0,22	0,21	0,20	0,27	0,42	0,53	0,58	0,82
Variazioni													
max ultimi sei anni	1,35	1,43	1,40	1,50	1,58	1,64	1,58	1,50	1,37	1,20	1,04	0,94	0,89
min ultimi sei anni	-4,67	-4,67	-4,55	-4,34	-3,89	-3,44	-2,96	-2,59	-2,16	-1,68	-1,31	-1,33	-1,57
volatilità ultimi sei anni	1,65	1,72	1,71	1,67	1,46	1,24	1,08	0,97	0,85	0,73	0,65	0,61	0,61
Dati al 31/12/2006	Fino a 1 mese	da oltre 1 mesi a 3 mesi	Da oltre 3 mesi fino a 6 mesi	Da oltre 6 mesi a 1 anno	Da oltre 1 anno a 2 anni	Da 2 anni a 3 anni	Da 3 anni a 4 anni	Da 4 anni a 5 anni	Da 5 anni a 7 anni	Da 7 anni a 10 anni	Da 10 anni a 15 anni	Da 15 anni a 20 anni	Oltre i 20 anni
Struttura per scadenza (a)	3,62	3,66	3,79	3,95	4,10	4,13	4,13	4,13	4,14	4,17	4,24	4,29	4,31
Livello max ultimi sei anni	4,87	4,86	4,85	4,78	4,76	4,77	4,87	4,98	5,15	5,40	5,64	5,82	5,89
Livello min ultimi sei anni (b)	2,02	1,99	1,94	1,92	1,97	2,11	2,36	2,54	2,74	3,01	3,29	3,49	3,59
(a) - (b)	1,61	1,68	1,85	2,03	2,13	2,02	1,77	1,59	1,39	1,17	0,95	0,81	0,72
Variazioni													
max ultimi sei anni	1,30	1,30	1,38	1,49	1,58	1,63	1,57	1,49	1,36	1,19	1,03	0,94	0,89
min ultimi sei anni	-1,87	-1,55	-1,58	-1,80	-2,18	-2,33	-2,29	-2,20	-2,05	-1,82	-1,55	-1,32	-1,32
volatilità ultimi sei anni	0,73	0,75	0,76	0,79	0,83	0,83	0,80	0,76	0,71	0,63	0,56	0,51	0,49

Fonte: Nostre Elaborazioni su dati Datastream<sup>TM</sup>.

Tabella 7. Stima dell'indicatore di rischiosità al 31/12/2009(\*)

DURATION APPROSSIMATA									
METODOLOGIA SEMPLIFICATA				SIMULAZIONI STORICHE					
Distribuzione dei depositi entro 1 anno				Distribuzione dei depositi entro 1 anno					
	(+200bp)	(-200bp)**	(-200bp)***		99per**	99per***	1 per**	1per***	
Limite inferiore	9,75%	-11,40%	-3,09%	Limite inferiore	4,64%	4,64%	-6,96%	-2,89%	
Punto medio	10,21%	-12,37%	-3,88%	Punto medio	4,36%	4,36%	-7,21%	-3,59%	
Limite superiore	10,99%	-8,35%	-2,77%	Limite superiore	4,18%	4,18%	-7,98%	-4,48%	
Distribuzione dei depositi entro 5 anni				Distribuzione dei depositi entro 5 anni					
	(+200bp)	(-200bp)**	(-200bp)***		99per**	99per***	1 per**	1per***	
Limite inferiore	-0,95%	0,18%	-1,56%	Limite inferiore	6,20%	1,84%	-3,82%	-3,82%	
Punto medio	-1,78%	1,25%	-2,04%	Punto medio	8,19%	2,33%	-4,78%	-4,78%	
Limite superiore	-2,86%	2,58%	-2,62%	Limite superiore	9,22%	3,16%	-6,07%	-6,07%	
KEY RATE DURATION									
METODOLOGIA SEMPLIFICATA				SIMULAZIONI STORICHE					
Distribuzione dei depositi entro 1 anno				Distribuzione dei depositi entro 1 anno					
	(+200bp)	(-200bp)**	(-200bp)***		99per**	99per***	1 per**	1per***	
Limite inferiore	7,74%	-8,60%	-2,25%	Limite inferiore	3,78%	3,78%	-5,84%	-2,31%	
Punto medio	7,81%	-8,90%	-2,72%	Punto medio	3,37%	3,37%	-5,80%	-2,85%	
Limite superiore	7,69%	-8,80%	-2,99%	Limite superiore	2,83%	2,83%	-6,01%	-3,37%	
Distribuzione dei depositi entro 5 anni				Distribuzione dei depositi entro 5 anni					
	(+200bp)	(-200bp)**	(-200bp)***		99per**	99per***	1 per**	1per***	
Limite inferiore	-2,99%	2,20%	-0,96%	Limite inferiore	7,10%	1,57%	-4,52%	-4,52%	
Punto medio	-4,45%	3,89%	-1,24%	Punto medio	9,58%	2,06%	-5,86%	-5,86%	
Limite superiore	-6,01%	5,73%	-1,45%	Limite superiore	10,44%	2,69%	-6,01%	-6,01%	

(\*) Tassi di valutazione e struttura per scadenza delle banche aggiornati al 31/12/2009.

(\*\*) Vincolo di non negatività pari a zero.

(\*\*\*) Vincolo di non negatività pari al livello minimo registrato negli ultimi 5 anni.

Fonte: Nostre Elaborazioni su dati di Bilancio e Datastream<sup>TM</sup>.

Tabella 8. Stima dell'indicatore di rischiosità al 31/12/2006(\*)

DURATION APPROSSIMATA									
METODOLOGIA SEMPLIFICATA				SIMULAZIONI STORICHE					
Distribuzione dei depositi entro 1 anno				Distribuzione dei depositi entro 5 anni					
	(+200bp)	(-200bp)(**)	(-200bp)(***)	99per(**)	99per(***)	1 per(**)	1per(***)		
Limite inferiore	9,75%	-10,19%	-4,34%	Limite inferiore	4,75%	4,75%	-7,32%	-5,25%	
Punto medio	10,21%	-10,99%	-3,80%	Punto medio	4,46%	4,46%	-7,30%	-5,51%	
Limite superiore	10,99%	-7,26%	-2,48%	Limite superiore	4,26%	4,26%	-7,94%	-5,67%	
Distribuzione dei depositi entro 5 anni				Distribuzione dei depositi entro 5 anni					
	(+200bp)	(-200bp)(**)	(-200bp)(***)	99per(**)	99per(***)	1 per(**)	1per(***)		
Limite inferiore	-0,95%	0,95%	5,44%	Limite inferiore	4,62%	5,42%	-3,79%	-3,79%	
Punto medio	-1,78%	1,78%	6,78%	Punto medio	6,26%	6,77%	-4,77%	-4,77%	
Limite superiore	-2,86%	2,86%	8,27%	Limite superiore	8,43%	8,46%	-6,07%	-6,07%	
KEY RATE DURATION									
METODOLOGIA SEMPLIFICATA				SIMULAZIONI STORICHE					
Distribuzione dei depositi entro 1 anno				Distribuzione dei depositi entro 5 anni					
	(+200bp)	(-200bp)(**)	(-200bp)(***)	99per(**)	99per(***)	1 per(**)	1per(***)		
Limite inferiore	7,26%	-7,26%	-3,24%	Limite inferiore	3,62%	3,62%	-5,61%	-4,16%	
Punto medio	7,32%	-7,32%	-2,53%	Punto medio	3,32%	3,32%	-5,51%	-4,29%	
Limite superiore	7,21%	-7,21%	-1,79%	Limite superiore	2,87%	2,87%	-5,63%	-4,14%	
Distribuzione dei depositi entro 5 anni				Distribuzione dei depositi entro 5 anni					
	(+200bp)	(-200bp)(**)	(-200bp)(***)	99per(**)	99per(***)	1 per(**)	1per(***)		
Limite inferiore	-2,70%	2,70%	5,92%	Limite inferiore	5,39%	5,89%	-4,19%	-4,19%	
Punto medio	-4,03%	4,03%	7,46%	Punto medio	7,27%	7,46%	-5,44%	-5,44%	
Limite superiore	-5,46%	5,46%	8,79%	Limite superiore	9,30%	8,97%	-5,63%	-5,63%	

(\*) I dati aggiornati al 31/12/2006 sono quelli relativi alla struttura per scadenza dei tassi di valutazione. I dati relativi alla struttura per scadenza delle attività e passività del campione di banche è quella al 31/12/2009.

(\*\*) Vincolo di non negatività pari a zero.

(\*\*\*) Vincolo di non negatività pari al livello minimo registrato negli ultimi 5 anni.

Fonte: Nostre Elaborazioni su dati di Bilancio e Datastream™.

Domenico Curcio e Igor Gianfrancesco

#### Bibliografia:

- BANCA D'ITALIA (2006), *Nuove Disposizioni di Vigilanza Prudenziale per le Banche*, Circolare n.263 del 27 dicembre 2006 e successivi aggiornamenti.
- BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION (2004), *Principles for Management and Supervision of Interest Rate Risk*, Basel, BIS. BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION (2006), *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: a Revised Framework*, Basel, BIS.
- BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION (2008), *Range of Practices and Issues in Economic Capital Modeling*, Basel, BIS.
- ENTROP O., WILKENS M., ZEISLER A. (2009), "Quantifying the Interest Rate Risk of Banks: Assumptions Do Matter" in *European Financial Management*, Vol.15, No.5, pp 1001-1018.
- FIORI R., IANNOTTI S. (2006), "Scenario Based Principal Component Value-at-Risk: An Application to Italian Bank's Interest Rate Risk Exposure", in *Journal of Risk*, Vol.9, No.3, pp 63-99.
- HO T. (1992), "Key Rate Durations: Measures of Interest Rate Risk", in *The Journal of Fixed Income*, Vo.2, No.2, pp.29-44,
- HOUP T.J.V., EMBERSIT J.A. (1991), "A Method for Evaluating Interest Rate Risk in Commercial Banks", in *Federal Reserve Bulletin*, August, pp.625-637.
- SIERRA G.E., YEAGER T.J. (2004), "What Does the Federal Reserve's Economic Value Model Tell Us About Interest Rate Risk at U.S. Community Banks?" in *The Federal Reserve Bank of St. Louis Review*, Vol.86, No.6, pp 45-60.
- WRIGHT D.M., HOUP T.J.V. (1996), "An Analysis of Commercial Bank Exposure to Interest Rate Risk", in *Federal Reserve Bulletin*, February, pp.115-128.

## Financial stress index in risk management

di Amira Dridi (University of Tunis) e Silvia Figini (University of Pavia)

### 1. Introduction

Recently, researchers become interested in stress periods that measure the vulnerability of a financial system in order to take actions to avoid potential crises and use some appropriate methodologies, such that financial stress testing (see e.g. Dridi et al. 2010) to determine stress intensity of a given system.

The stress level is measured on a scale ranging from tranquil situations, where stress is quasi-absent, to extreme distress, where the system goes through a severe crisis. The interaction of the shock's magnitude and the system's fragility determines the stress level. One relevant measure of the latter is the financial stress index (FSI).

Related indices have been developed by Hanschel and Monnin (2003). They presented an FSI for the bank of Switzerland, Illing and Liu (2006) for Canada, Cardarelli et al. (2009) computed an FSI for developed economies, Balakrishnan et al. (2009) proposed an FSI for emerging countries and compared it with developed ones.

Dridi et al. (2010) proposed an FSI based on extreme value theory (EVT) to determine stress periods in the Tunisian banking system.

In this contribution we describe the approaches used to compute the FSI.

To reach this objective this paper reports in Section 2 the theoretical background and Section 3 shows empirical evidences achieved on a real data set.

### 2. Theoretical approaches for FSI computation

In this section we propose how to derive, starting from a set of  $k$  quantitative variables a summary measure of FSI.

Before to start the description of our approach, we highlight that we are not interested in variable selection but our focus is on statistical techniques useful to merge the data collected on the statistical units at hand in a financial stress index.

Traditional techniques proposed in the literature to measure FSI are non parametric and they are several criticized for the lack of their distribution specification and consequently for the heuristic threshold selection in detecting stress periods.

Dridi et al. (2010) proposed a new method of monitoring FSI based on EVT control chart namely the FSI-EVT control that overcomes these drawbacks by relying on EVT to determine a threshold capable to detect critical periods especially in the banking sector.

In order to compute the FSI we standardize the variables equalizing the variance of the components and then we average the standardised scores using identical weights.

In a more compact way, given  $X_1, \dots, X_k$  quantitative variables and  $j=1, \dots, n$  observations, the FSI index is computed as follows:

$$FSI_j = \frac{\sum_{k=1}^K (X_{jk} - \bar{X}_k)}{S_k}, j=1, \dots, n \quad (1)$$

where  $X_{jk}$  are the variables involved in the FSI computation;  $\bar{X}_k$  is the mean of the  $k$ -th variable and  $S_k$  is its standard deviation. In order to derive a global measure of financial stress, the resulting FSI can be summarised on the basis of explorative measures.

On the basis of the results achieved from equation 1, the second step is to estimate the parameters of the FSI distributions following the extreme value analysis (ETV). Simulation analysis based on Monte Carlo are required to derive further measures of risk, such as the Value at Risk.

In this field of research an interesting problem which we are studying is how to combine financial stress indexes to obtain a coherent measure of risk. Following Figini and Giudici (2010) the geometric mean is a semi coherent measure which guarantee stochastic ordering and comparison.

A different proposal to compute FSI is based on merging financial indicators using a Bayesian approach and/or empirical cumulative distribution function (see e.g. Bonafede and Giudici, 2007; Dalla Valle and Giudici, 2008); Figini, Giudici and Uberti, 2010. This approach is under investigation.

### 3. Empirical evidences

In order to show how our approach works, we use a real data set composed of financial ratios registered on 1000 enterprises grouped in 9 business sectors. Financial ratios are useful indicators of a firm's performance and financial situation. Most ratios can be calculated from information provided by the financial statements. The following types of ratios frequently are used:

- *Liquidity Ratios* which give a picture of a company's short term financial situation or solvency.
- *Leverage Ratios* which show the extent that debt is used in a company's capital structure.
- *Operational Ratios* which use turnover measures to show how efficient a company is in its operations and use of assets.
- *Profitability Ratios* which use margin analysis and show the return on sales and capital employed.
- *Solvency Ratios* which give a picture of a company's ability to generate cash flow and pay its financial obligations.

In this paper we focus on the first two categories of financial ratios and more precisely on : *liquidity current ratio and liquidity quick ratio*. In general, liquidity ratios provide information about a firm's ability to meet its short-term financial obligations.

The liquidity current ratio is the ratio between the current assets and the current liabilities. Short term creditors prefer a high current ratio since it reduces their risk. Shareholders may prefer a lower current ratio so that more of the firm's assets are working to grow the business. Typical values for the current ratio vary by firm and sector. For example, firms in cyclical industries in order to remain solvent during downturns, may maintain a higher current ratio. One drawback of the current ratio is that inventory may include many items that are difficult to liquidate quickly and that have uncertain liquidation values.

The quick ratio is an alternative measure of liquidity that does not include inventory in the current assets. The quick ratio is defined as the ratio between the current assets minus the Inventory and the current liabilities. The current assets used in the quick ratio are cash, accounts receivable, and notes receivable.

On the other hand, financial leverage ratios provide an indication of the long-term solvency of the firm. Unlike liquidity ratios that are concerned with short-term assets and liabilities, financial leverage ratios measure the extent to which the firm is using long term debt.

In this paper we focus on: *debt ratio* measured as total debt divided by total assets and *debt to equity ratio* defined as total debt divided by total equity. Debt ratios depend on the classification of long-term leases and on the classification of some items as long term debt or equity.

On the basis of equation 1, we are able to compute for each enterprise FSI debt and FSI liquidity.

Starting from here a large set of comparisons are available. Table 1 and Table 2 report the mean of FSI Liquidity and Debt grouped by Business sector.

Table 1: Mean of FSI Liquidity by business sector

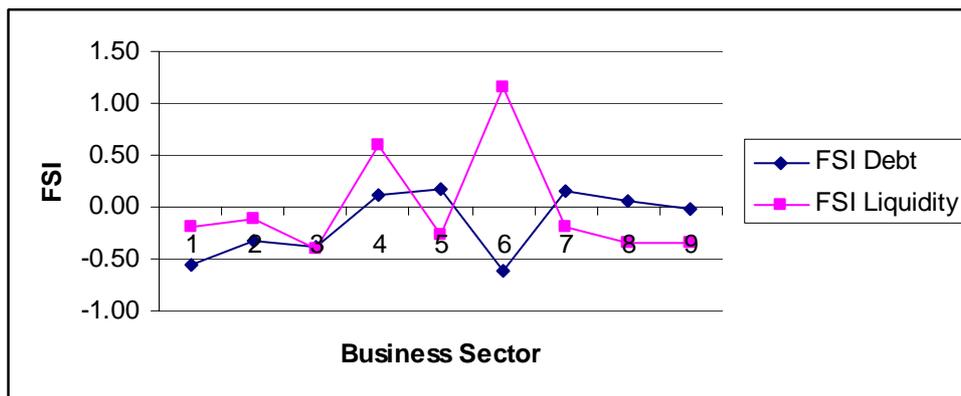
Business Sector	Mean of FSI Liquidity
1	-0.20
2	-0.12
3	-0.41
4	0.60
5	-0.26
6	1.16
7	-0.20
8	-0.34
9	-0.35

Table 2: Mean of FSI Debt by business sector

Business Sector	Mean of FSI Debt
1	-0.56
2	-0.32
3	-0.39
4	0.12
5	0.16
6	-0.62
7	0.16
8	0.06
9	-0.02

Figure 1 shows a comparison in terms of mean between FSI Debt and FSI Liquidity.

Figure 1: Comparison FSI Debt and FSI Liquidity



If the level of the FSI is above the zero mean then the stress is greater than average. As we can observe from Figure 1, the enterprises show different financial stress risk indicators for Debt and Liquidity. Sectors 4 and 6 show higher levels of liquidity stress than the other sectors. For FSI's Debt, sectors 4, 5, 7 and 8 are stressed.

Following our approach a larger set of comparison among the enterprises involved in the analysis are possible.

#### 4. Conclusions

In this paper we have reported in a concise way an innovative index of financial stress useful to merge different kind of information collected on a set of quantitative variables.

Empirical evidences are provided on a real data set. Further ideas of research will consider extreme value theory and Bayesian analysis for monte carlo simulation and database merging.

#### 5. Acknowledgements

The Authors thank Prof. Paolo Giudici and Prof. Mohamed Liman for the supervision and academic guidance.

#### References

- Balakrishnan, R., Danninger, S., Elekdag, S. and Tytell, I., (2009), "The Transmission of Financial Stress from Advanced to Emerging Economies", IMF Working Paper.
- Bonafede, E. and Giudici, P. (2007) Bayesian networks for enterprise risk assessment. *Physica A*, 382, pp. 22-28.
- Cardarelli, R., Elekdag, S. and Lall, S., (2009), "Financial Stress, Downturns, and Recoveries", IMF Working Paper.
- Dalla Valle, L. and Giudici, P. (2008) A Bayesian approach to estimate the marginal loss distribution in operational risk management.
- Dridi, A., El Ghourabi, M. and Limam, M., (2010), "On monitoring the financial stress index with extreme value theory", *Quantitative Finance*.
- Figini, S. and Giudici, P., (2010), Statistical merging of rating models. *Journal of the operational research society*.
- Figini, S., Giudici, P. and Uberti, P., (2010), A threshold based approach to merge data in financial risk management. *Journal of Applied Statistics*.
- Hanschel, E. and Monnin, P., (2003), "Measuring and forecasting stress in the banking sector: evidence from Switzerland", 22, *BIS Papers*.
- Illing, M. and Liu, Y., (2006), "Measuring Financial Stress in a Developed Country: An Application to Canada, *Journal of Financial Stability*, Vol. 2.

# Studio della convergenza dei modelli di pricing discreti multinomiali azionari: Teoria e applicazioni con tecniche di controllo dell'errore

di Pier Giuseppe Giribone e Simone Ventura (Banca Carige)

## 1 Introduzione

Con il presente studio gli autori propongono una metodologia per il controllo dell'errore commesso sul prezzo di opzioni finanziarie [1], valorizzate mediante l'impiego di alberi stocastici: tecnica numerica che, utilizzando le regole della statistica matematica, interpreta per mezzo di catene markoviane il tipico andamento teorico diffusivo degli assets finanziari. La tecnica di controllo messa a punto è stata implementata impiegando il software di elaborazione numerica Matlab e si considera interessante sia per la sua idoneità ad essere automatizzata, sia per la facilità con la quale essa può essere gestita in un sistema di pricing automatizzato [11]. L'articolo si suddivide in due sezioni principali: nella prima viene fornita la dimostrazione della convergenza del modello discreto a quello continuo e la sua idoneità a rappresentare correttamente la dinamica evolutiva del sottostante azionario. Essa rappresenta una sintesi della dimostrazione dell'articolo di Hua He [8], riportata negli aspetti salienti in relazione al contributo originale del lavoro. Una volta provato teoricamente il risultato, la seconda parte del paper si concentra sull'aspetto applicativo fornendo l'evidenza sperimentale di quanto trattato e proponendo una metodologia in grado di controllare il livello di convergenza del processo e, quindi l'errore commesso sul prezzo del derivato.

## 2 Teoria della convergenza del modello numerico

In tale sezione viene fornita la prova della convergenza dell'approssimazione derivante da un modello discreto composto da una sequenza di catene markoviane N-variate, (N+1)-nomiali ad un processo diffusivo stocastico ad N dimensioni, che costituisce quindi una generalizzazione della dimostrazione proposta nel 1979 da Cox, Ross e Rubinstein in relazione al modello binomiale di pricing delle opzioni (CRR) proposto [2]. Tale dimostrazione, riguardante la convergenza debole dei modelli finanziari basati su catene markoviane alla loro controparte continua, si rende necessaria per giustificare teoricamente la generalizzazione dell'approccio adottato sul controllo dell'errore sul prezzo nel paragrafo successivo.

### 2.1 Definizione degli strumenti della matematica stocastica per la dimostrazione della convergenza

Lo strumento fondamentale che serve a stabilire un collegamento tra l'approssimazione discreta di una sequenza di catene markoviane con un processo diffusivo, che, in accordo con la teoria di Black e Scholes [3], assume la dinamica di un moto geometrico browniano è rappresentato dal *teorema del limite centrale per martingale*.

Si consideri come dominio lo spazio di funzioni:  $D^M[0,1]:[0,1] \rightarrow \mathfrak{R}^M$ , la topologia impiegata è quella di Skorohod e, in accordo con gli studi di Billingsley, l'insieme boreliano che viene così generato è denotato con  $\hat{D}$  [4].

Sia  $X^n$  una sequenza di processi stocastici in  $D^M[0,1]$  e sia  $P_n$  la misura di probabilità su  $D^M[0,1]$  associata a  $X^n$ , ovvero per qualsiasi insieme  $A \in \hat{D}$ ,  $P_n(A)$  è la probabilità dell'evento  $\{X^n \in A\}$ .

Una sequenza di processi stocastici  $X^n$  in  $D^M[0,1]$  converge debolmente (o "in distribuzione") a  $X$ , denotato con  $X^n \Rightarrow X$ , se per qualsiasi funzione continua vincolata  $h: D^M[0,1] \rightarrow \mathfrak{R}$ , si ha  $E_n[h(X^n)] \rightarrow E[h(X)]$ , dove  $E_n[\cdot]$  è il valore atteso sotto la misura di probabilità  $P_n$  e  $E[\cdot]$  è il valore atteso sotto la misura  $P$ , associata ad  $X$ .

Sia, inoltre, la dinamica di  $X$  regolata dall'equazione differenziale stocastica:

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \quad (1)$$

Dove:

$b(x)$  è un vettore  $M \times 1$ ,  $\forall x \in \mathfrak{R}^M$ .

$\sigma(x)$  è una matrice  $M \times N$ ,  $\forall x \in \mathfrak{R}^M$

$W$  è un processo Wieneriano  $N$  dimensionale

Si noti che, particolarizzando la (1), con i valori  $\begin{cases} b(X_t) = b \cdot X_t \\ \sigma(X_t) = \sigma \cdot X_t \end{cases}$  si ottengono le ipotesi di dinamica diffusiva in accordo

con la teoria di Black e Scholes, la cui approssimazione discreta è rappresentata dagli alberi CRR.

Si dice che la (1) ammette una soluzione debole  $X$  se questa soddisfa  $X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s$ , dove tutti gli integrali stocastici risultino definiti.

Inoltre la soluzione  $X$  è unica se soddisfa una delle seguenti due condizioni individuate da Rogers e Williams nel 1987 [5]:

i)  $b$  e  $\sigma$  soddisfano la condizione di uniforme lipschitzianità, ovvero, esiste una costante  $L > 0$  tale per cui  $\forall x, y \in \mathfrak{R}^M$   
 $|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq L|x - y|$

ii)  $a(x) = \sigma(x)\sigma(x)^T$  è strettamente positiva, definita per  $\forall x \in \mathfrak{R}^M$ , ed esiste una costante  $K$  per  $\forall x \in \mathfrak{R}^M$  tale che  
 $|a(x)| \leq K(1 + |x|^2)$ ,  $|b(x)| \leq K(1 + |x|)$

Dove  $A^T$  è la matrice trasposta di una generica matrice  $A$  e  $|A| \equiv \text{trace}(A^T A)^{1/2}$  è la sua norma.

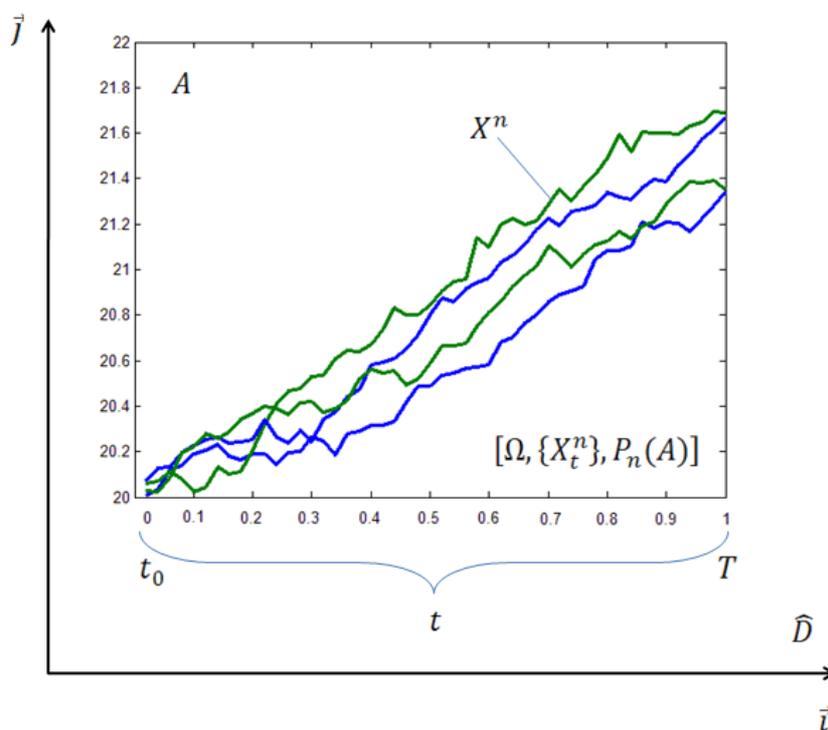


Figura 1. Topologia e Mappatura dello spazio vettoriale di riferimento

Avendo introdotto tutte le notazioni e le definizioni atte ad enunciare il Teorema del limite centrale per martingale, la cui dimostrazione formale è stata affrontata da Ethier e Kurtz nel 1986 [6], ci si limita ad esporne l'enunciato.

### 2.2 Teorema del limite centrale per martingale

Siano  $b$  e  $\sigma$  continui, in modo tale che la (1) ammetta un'unica soluzione debole  $X$  con  $X_0 = x_0$ .

Sia  $X^n$  una sequenza di catene markoviane definita in  $D^M[0,1]$ .

Siano  $L^n$  e  $A^n$  matrici rispettivamente di dimensioni  $N \times 1$  ed  $N \times N$  i cui elementi siano definiti in  $D^1[0,1]$  e la quantità  $A_t^n - A_s^n$  non negativa sia definita per  $t > s \geq 0$ .

Sia la quantità  $\tau_n^q = \inf \left\{ t \leq T : |X_t^n| \geq q \vee |X_{t-}^n| \geq q \right\}$

Se sono verificate tutte le condizioni seguenti:

a)  $X_0^n \rightarrow x_0$  in distribuzione

b)  $M^n \equiv X^n - L^n$  e  $M^n M^{nT} - A^n$  sono martingale

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n \left[ \sup_{t \leq \tau_n^q} |X_t^n - X_{t-}^n|^2 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n \left[ \sup_{t \leq \tau_n^q} |L_t^n - L_{t-}^n|^2 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n \left[ \sup_{t \leq \tau_n^q} |A_t^n - A_{t-}^n| \right] = 0, \forall q > 0$

d)  $\sup_{t \leq \tau_n^q} \left| L_t^n - \int_0^t b(X_s^n) ds \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \sup_{t \leq \tau_n^q} \left| A_t^n - \int_0^t a(X_s^n) ds \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall q > 0$

Allora  $X^n \Rightarrow X$ .

### 2.3 L'Approssimazione Multinomiale

Definito lo strumento che permette di ricondurre un processo discreto  $X^n$  alla controparte continua  $X$ , si rende ora necessaria la costruzione dell'approssimazione numerica più idonea a rappresentare un processo diffusivo azionario coerente con il mercato e che, contemporaneamente, soddisfi le condizioni a), b), c) e d) per garantire la convergenza del modello.

Si procede pertanto alla costruzione di una sequenza di processi N-variat e (N+1)-nomiali che descrivono l'evoluzione dei prezzi azionari e convergenti in distribuzione al processo stocastico diffusivo proposto da Black e Scholes.

Si consideri un mercato mobiliare, formato da  $N$  azioni ed un'unica obbligazione priva di rischio, i cui processi di evoluzione del prezzo siano descritti dalle equazioni:

$$dS_t = b(S_t)dt + \sigma(S_t)dW_t \quad (2)$$

$$dB_t = B_t r(S_t)dt; B_0 = 1 \quad (3)$$

Dove:

$W_t$  è il moto browniano standard  $N$  - dimensionale.

$S_t$  è il vettore  $N$  - dimensionale dei prezzi assunti nel tempo dall'azione

$B_t$  è il valore assunto dal bond nel tempo.

Sotto l'ipotesi che tale mercato di riferimento sia dinamicamente completo e che non siano presenti opportunità d'arbitraggio (ipotesi di base dei modelli economici avanzati da Black e Scholes), sono valide le seguenti proprietà sui parametri del sistema descritto da (2) + (3):

$b: \mathfrak{R}^N \rightarrow \mathfrak{R}^{N \times 1}$ ,  $\sigma: \mathfrak{R}^N \rightarrow \mathfrak{R}^{N \times N}$ ,  $r: \mathfrak{R}^N \rightarrow \mathfrak{R}$  continue,  $\sigma$  non singolare,  $r \geq 0$  e l'intervallo di evoluzione degli assets normalizzabile in  $t \in [0,1]$ .

$b$  e  $\sigma$  soddisfano l'uniforme lipschitziana, quindi esiste una costante  $K$  tale che  $|b(x)| + |\sigma(x)| \leq K(1 + |x|)$ ,  $\forall x \in \mathfrak{R}^N$

Esiste un'unica misura di probabilità neutrale al rischio per il sistema di pricing definito da (2) + (3),  $Q$ , definita da:

$$Q(A) \equiv \int_A \xi_t(\omega) dP$$

Dove:

$$\xi_t = \exp \left[ \int_0^t \kappa_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\kappa_s|^2 ds \right] \text{ con } \kappa(S_t) = -\sigma(S_t)^{-1} [b(S_t) - r_t S_t]$$

Inoltre il processo definito da  $\{\xi_t\}$  soddisfa l'equazione differenziale stocastica:

$$d\xi_t = \kappa(S_t) \xi_t dW_t; \xi_0 = 1 \quad (4)$$

In letteratura  $\xi_t(\omega)$  è normalmente interpretato come il prezzo implicito di Arrow-Debreu per unità di probabilità in relazione ad un titolo che paga un'unità al tempo  $t$  e allo stato  $\omega$  e zero diversamente.

L'idea di base per costruire una sequenza di processi  $(N+1)$ -nomiali multivariati è quella di approssimare gli incrementi di  $N$  moti browniani indipendenti per mezzo di  $N$  variabili casuali indipendenti. Si procede quindi alla costruzione di tali variabili random.

Sia  $A$  una matrice reale, ortogonale, di dimensione  $(N+1) \times (N+1)$  tale che la sua ultima colonna sia  $\left( \frac{1}{\sqrt{N+1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{N+1}} \right)^T$ .

Si definisce una sequenza di vettori casuali  $N$ -dimensionali indipendenti ed identicamente distribuiti,  $\tilde{\varepsilon}_k = (\tilde{\varepsilon}_k^1, \dots, \tilde{\varepsilon}_k^N)^T$ ,  $k = 1, \dots, n$  come segue:

Sia  $\Omega_k = \{\omega_1^k, \dots, \omega_{N+1}^k\}$  lo spazio su cui  $\tilde{\varepsilon}_k$  è definita; imponiamo che ciascun stato  $\omega_s^k$  abbia equa probabilità d'accadimento e cioè per  $j = 1, \dots, N$

$$P[\tilde{\varepsilon}_k^j(\omega_s^k) = a_{s,j} \sqrt{N+1}] = \frac{1}{N+1} \text{ con } s = 1, \dots, N+1$$

Per  $k$  fissati,  $\tilde{\varepsilon}_k^j, \dots, \tilde{\varepsilon}_k^N$  sono variabili casuali scorrelate con media zero e varianza unitaria.

Successivamente, si suddivide l'intervallo  $[0,1]$  in  $N$  parti equamente suddivise di lunghezza  $\frac{1}{n}$  e si definisce una sequenza di prezzi  $(\tilde{S}_t^n, \tilde{B}_t^n)$  come segue: siano  $S_k^n$  e  $B_k^n$  le soluzioni alle differenze finite delle SDE (2) e (3)

$$S_{k+1}^n = S_k^n + \frac{b(S_k^n)}{n} + \sigma^1(S_k^n) \frac{\tilde{\varepsilon}_k^1}{\sqrt{n}} + \dots + \sigma^N(S_k^n) \frac{\tilde{\varepsilon}_k^N}{\sqrt{n}}, S_0^n = S_0 \quad (5)$$

$$B_{k+1}^n = B_k^n \left( 1 + \frac{r(S_k^n)}{n} \right), B_0^n = 1 \quad (6)$$

Dove  $\sigma^j$  è la  $j$ -esima colonna di  $\sigma$ .

Ponendo  $\tilde{B}_t^n = \tilde{B}_{[nt]}^n$  e  $\tilde{S}_t^n = \tilde{S}_{[nt]}^n$ , i processi  $\tilde{B}_t^n$  e  $\tilde{S}_t^n$  sono ben definiti per  $\forall t \in [0,1]$  e i percorsi generati dall'integrazione numerica sono costanti a tratti, con variazioni in corrispondenza di  $t = \frac{k}{n}$ .

Dal momento che ci sono  $N + 1$  asset scambiati e  $N + 1$  possibili stati incerti che seguono ciascuna data di scambio ( $k/n$ ) i mercati sono dinamicamente completi. Ciò implica che l'unico prezzo di Arrow-Debreu,  $\pi_{S_k^n}(\omega_s^k)$  al tempo  $\frac{k}{n}$  e il prezzo dell'azione  $S_k^n$  per un titolo che paga un'unità al tempo  $\frac{k+1}{n}$  e allo stato  $\omega_s^k$  e zero altrimenti, deve soddisfare la relazione:

$$\sum_{s=1}^{N+1} \pi_{S_k^n}(\omega_s^k) S_{k+1}^n(\omega_s^k) = S_k^n \quad (7)$$

Sostituendo la (5) nella (7), si ottiene:

$$\pi_{S_k^n}(\omega_s^k) = \frac{1 + \frac{\kappa(S_k^n)^T}{\sqrt{n}} \tilde{\varepsilon}_k(\omega_s^k)}{(N+1) \left(1 + \frac{r(S_k^n)}{n}\right)}$$

L'espressione ottenuta per  $\pi_{S_k^n}$  rappresenta il prezzo mono-periodale (dal tempo  $\frac{k}{n}$  a  $\frac{k+1}{n}$ ) di Arrow-Debreu. Per ottenere il valore al tempo zero di  $\pi$ , denotato con  $\pi_k^n$ , è necessario eseguire la produttoria tra i valori monoperiodali stimati:

$$\pi_k^n = \pi_{S_{k-1}^n} \pi_{S_{k-2}^n} \dots \pi_{S_0^n} \text{ per } k \geq 1 \text{ e } \pi_0^n = 1 \text{ per } k = 0$$

Inoltre, essendo la quantità  $\pi$  non-negativa per  $n$  sufficientemente grandi, risulta soddisfatta la SDE:

$$\pi_{k+1}^n = \pi_k^n \frac{\left(1 + \frac{\kappa(S_k^n)^T}{\sqrt{n}} \tilde{\varepsilon}_k\right)}{(N+1) \left(1 + \frac{r(S_k^n)}{n}\right)}$$

Per relazionare i processi  $\{\pi_k^n\}$  con quelli ottenuti evolvendo  $\{\xi_t\}$  con la dinamica definita nella (4), si introducono due nuove variabili  $\xi_k^n \equiv \pi_k^n B_k^n (N+1)^k$ , il cui valore atteso è per  $k = n$ :  $E_n(\xi_k^n) = 1$  e  $Q^n(A) = \int_A \xi_n^n P_n(dW)$  la misura di martingala equivalente derivante dalla relazione (7).

In analogia a quanto fatto nel caso continuo per  $\xi_t$ , sia  $\xi_k^n$  il prezzo implicito di Arrow-Debreu per unità di probabilità, il cui processo di evoluzione è regolato dalla legge:

$$\xi_{k+1}^n = \xi_k^n \left(1 + \frac{\kappa(S_k^n)^T}{\sqrt{n}} \tilde{\xi}_k\right) \text{ per } t \in [0,1] \text{ con } \tilde{\xi}_t^n = \xi_{[nt]}^n \quad (8)$$

Si hanno pertanto tutti i requisiti per dimostrare che la discretizzazione introdotta  $\tilde{X}^n = (\tilde{S}^n, \tilde{B}^n, \tilde{\xi}^n)$  tende al limite continuo a  $X = (S, B, \xi)$ .

#### 2.4 La discretizzazione della dinamica del processo di evoluzione converge in distribuzione al processo stocastico continuo

Costruita l'approssimazione multinomiale  $\tilde{X}^n$  per  $X$ , rimane da dimostrare che per  $n \rightarrow \infty$ ,  $\tilde{X}^n$  converge debolmente a  $X$ ,  $\tilde{X}^n \Rightarrow X$ . Tale risultato si ottiene dalla verifica delle ipotesi del *Teorema del limite centrale per martingale*.

Innanzitutto si prova l'esistenza ed unicità della soluzione di (2) e (3), garantita dalla condizione di uniforme lipschitzianità e di crescita lineare di  $b$  e  $\sigma$  (i); per conseguenza anche la (4) ammette un'unica soluzione debole.

Successivamente, si definiscono le matrici:

$$L_t^n \equiv \begin{bmatrix} \int_0^{[nt]} b(\tilde{S}_s^n) ds \\ \int_0^{[nt]} r(\tilde{S}_s^n) \tilde{B}_s^n ds \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } A_t^n \equiv \begin{bmatrix} \int_0^{[nt]} \sigma(\tilde{S}_s^n) \sigma^T(\tilde{S}_s^n) ds & 0 & -\int_0^{[nt]} \sigma(\tilde{S}_s^n) \kappa(\tilde{S}_s^n) \tilde{\xi}_s^n ds \\ 0 & 0 & 0 \\ -\int_0^{[nt]} \kappa(\tilde{S}_s^n)^T \sigma(\tilde{S}_s^n) \tilde{\xi}_s^n ds & 0 & \int_0^{[nt]} |\kappa(\tilde{S}_s^n) \tilde{\xi}_s^n|^2 ds \end{bmatrix}$$

Allora la quantità  $A_t^n - A_s^n$  non negativa e definita per  $t \geq s$  e  $M^n \equiv X^n - L^n$ ,  $M^n (M^n)^T - A^n$  è una martingala.

Per verificare le rimanenti ipotesi c) e d) del Teorema, si rende necessario studiare gli ordini di convergenza  $\Theta[f(n)]$ .

Ricordando la continuità di  $r$ ,  $b$ ,  $\sigma$  e  $\kappa$ , la velocità di convergenza a zero delle serie risulta

$$|X_t^n - X_{t-}^n| \text{ con una velocità pari a } \Theta\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

$$|L_t^n - L_{t-}^n| \text{ e } |A_t^n - A_{t-}^n| \text{ con una velocità pari a } \Theta\left[\frac{1}{n}\right]$$

$$\left| L_t^n - \int_0^t b(X_s^n) ds \right| \text{ e } \left| A_t^n - \int_0^t a(X_s^n) ds \right| \text{ con un ordine inferiore a } \Theta(n)$$

Tali considerazioni permettono di concludere la dimostrazione, ottenendo la prova che le catene markoviane di probabilità  $\tilde{X}^n$  costituiscono una valida approssimazione numerica del processo definito sul continuo  $X$ .

In particolare, considerando il sistema di pricing in accordo con le ipotesi del modello di Black e Scholes per  $N = 1$ :

$$B_t = e^{rt}$$

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)}$$

Per  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$  si ottiene l'approssimazione binomiale dell'albero di Cox, Ross e Rubinstein

Per  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$  si ottiene l'approssimazione trinomiale dell'albero di Cox, Ross e Rubinstein

$$S_{k+1}^n \begin{cases} S_k^n + \frac{\mu S_k^n}{n} + \frac{\sigma S_k^n}{\sqrt{n}} \\ S_k^n + \frac{\mu S_k^n}{n} - \frac{\sigma S_k^n}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

$$S_{k+1}^n \begin{cases} S_k^n + \frac{\mu S_k^n}{n} + \sigma S_k^n \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2n}} \\ S_k^n + \frac{\mu S_k^n}{n} \\ S_k^n + \frac{\mu S_k^n}{n} - \sigma S_k^n \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2n}} \end{cases}$$

## 2.5 La convergenza sul prezzo del derivato

Un'immediata conseguenza del teorema, che permette di affermare  $\tilde{X}^n \Rightarrow X$ , è la convergenza numerica del fair value  $V$  dello strumento finanziario.

Sia  $g(S_1): \mathfrak{R}^N \rightarrow \mathfrak{R}$ , il pay-off caratterizzante l'opzione da valorizzare, allora il prezzo di tale strumento al tempo  $t$  può essere valutato con il valore atteso dei pay-off finali scontati (al tempo  $t = 1$ ) sotto la misura di martingala equivalente  $Q$  [7].

$$V(S_t, t) = E_Q \left[ e^{-\int_t^1 r(S_\tau, \tau) d\tau} g(S_1) | S_t \right] = E \left[ \frac{\xi_1}{\xi_t} e^{-\int_t^1 r(S_\tau, \tau) d\tau} g(S_1) | S_t \right] \quad (9)$$

Tale approccio valutativo può essere applicato anche ai corrispondenti modelli a tempo discreto:

$$V^n \left( S_k^n, \frac{k}{n} \right) = E_{Q^n} \left[ \frac{g(S_n^n) B_k^n}{B_n^n} | S_k^n \right] = E_n \left[ \frac{\xi_n}{\xi_k} \frac{g(S_n^n) B_k^n}{B_n^n} | S_k^n \right]$$

Il *Teorema del Contingent Claim Pricing*, del quale è riportato solo l'enunciato (la cui dimostrazione si trova nell'appendice del paper di Hua He [8]), assicura la convergenza sul prezzo:

- $r(x)$  e  $r(x)x$  soddisfano la condizione di uniforme Lipschitzianità per  $\forall x \in \mathfrak{R}^N$
- $r(x)$  e  $\sigma(x)$  sono continuamente differenziabili sino al sesto ordine e tutte le derivate soddisfano la condizione di crescita polinomiale, ovvero  $\exists K_1, \beta > 0$  tali che  $|f(x)| \leq K_1 (1 + |x|^\beta)$ ,  $\forall x \in \mathfrak{R}^N$ .
- $g(x)$  è definita a tratti e continuamente differenziabile sino al sesto ordine con tutte le sue derivate che soddisfano la condizione di crescita polinomiale

Allora, chiamando  $V_t = V(S_t, t)$ ,  $V_k^n = V^n \left( S_k^n, \frac{k}{n} \right)$  e  $\tilde{V}_t^n = V_{[nt]}^n$ , si ha  $\tilde{V}_t^n \Rightarrow V_t \quad \forall t \in [0, 1]$ .

In particolare per  $t = 0$  e per  $n \rightarrow \infty$ ,  $\tilde{V}_0^n \Rightarrow V_0$ .

### 3 La metodologia proposta per il controllo dell'errore sulla valorizzazione dell'opzione finanziaria

Dimostrata la validità dell'approssimazione multinomiale e quindi la convergenza per  $n \rightarrow \infty$  al fair value dell'opzione valorizzata mediante alberi stocastici, si pone il problema di scegliere correttamente il valore finito di  $n$  che permette di avere un'approssimazione soddisfacente del valore dello strumento finanziario. In altri termini, l'unico parametro del modello di pricing non determinato né dal mercato, né dalle specifiche dell'opzione da valorizzare rimane la scelta dell'arborescenza dell'albero, ovvero gli intervalli temporali di discretizzazione. In questa sezione si propone una procedura automatizzata in grado di scegliere il numero di periodi in funzione del livello di accuratezza,  $\zeta$ , con il quale si desidera comunicare il valore teorico dell'opzione,  $\tilde{V}_0^n$ .

Il flusso logico della Figura 2 illustra l'architettura del software di controllo implementato in ambiente Matlab.

L'utilizzatore definisce i dati d'ingresso del modello di pricing, memorizzandoli in quattro strutture:

*RateSpec*, contenenti le specifiche dei tassi d'interesse componenti la zero curve, atti ad ottenere i fattori di sconto con i quali attualizzare i valori.

*StockSpec*, contenenti i dati relativi al sottostante azionario

*TimeSpec*, contenenti le specifiche atte a definire l'albero stocastico impiegato per la valorizzazione, tra cui il numero di intervalli temporali  $n$

*OptSpec*, contenente le specifiche dello strumento finanziario da valutare.

Tali strutture costituiscono gli input per il motore di pricing, il quale restituisce il *fair value*,  $\tilde{V}_0^n$  del derivato alla data di valutazione ( $t = 0$ ) per un'approssimazione basata su  $n$  intervalli temporali.

Il risultato viene memorizzato in un array e viene calcolata la grandezza  $\Delta_n$ , definita come il valore assoluto della differenza tra il prezzo ottenuto,  $\tilde{V}_0^n$  e quello precedentemente memorizzato dal calcolo eseguito nell'iterazione precedente,  $\tilde{V}_0^{n-1}$ .

La differenza viene confrontata con il livello di accuratezza,  $\zeta$ , con il quale si vuole comunicare l'output del modello: se essa risulta adeguata, cioè  $\zeta > \Delta_n$ , la procedura termina indicando di aver raggiunto il livello di convergenza desiderato sul prezzo; altrimenti riconosce che l'approssimazione discreta non risulta adeguata per il livello di errore che si è disposti a commettere sulla valorizzazione finale del derivato e quindi incrementa  $n$  di un'unità e ricalcola l'output.

Tale ciclo si ripete fintanto che non viene incontrato uno dei due seguenti criteri di stop:

- a) si raggiunge il numero massimo di iterazioni consentite dall'utente e quindi l'utente deve o incrementare il numero di iterazioni o diminuire la precisione del valore dell'opzione per raggiungere la convergenza desiderata sul prezzo
- b) si ottiene la tolleranza desiderata e quindi la procedura fornisce il valore in accordo alle specifiche.

La dimostrazione teorica, affrontata nel paragrafo precedente, riguardante la convergenza sia della dinamica del processo diffusivo di evoluzione del sottostante  $\tilde{X}^n \Rightarrow X$ , sia quella del prezzo del derivato  $\tilde{V}_0^n \Rightarrow V_0$  del modello di pricing adottato, assicura che la grandezza  $\Delta_n \equiv |\tilde{V}_0^n - \tilde{V}_0^{n-1}|$  diminuisce iterazione dopo iterazione.

Questo è anche logico, dal momento che, aumentando gli intervalli temporali dell'albero, si incrementa la qualità dell'approssimazione di un modello discreto la cui convergenza è stata provata.

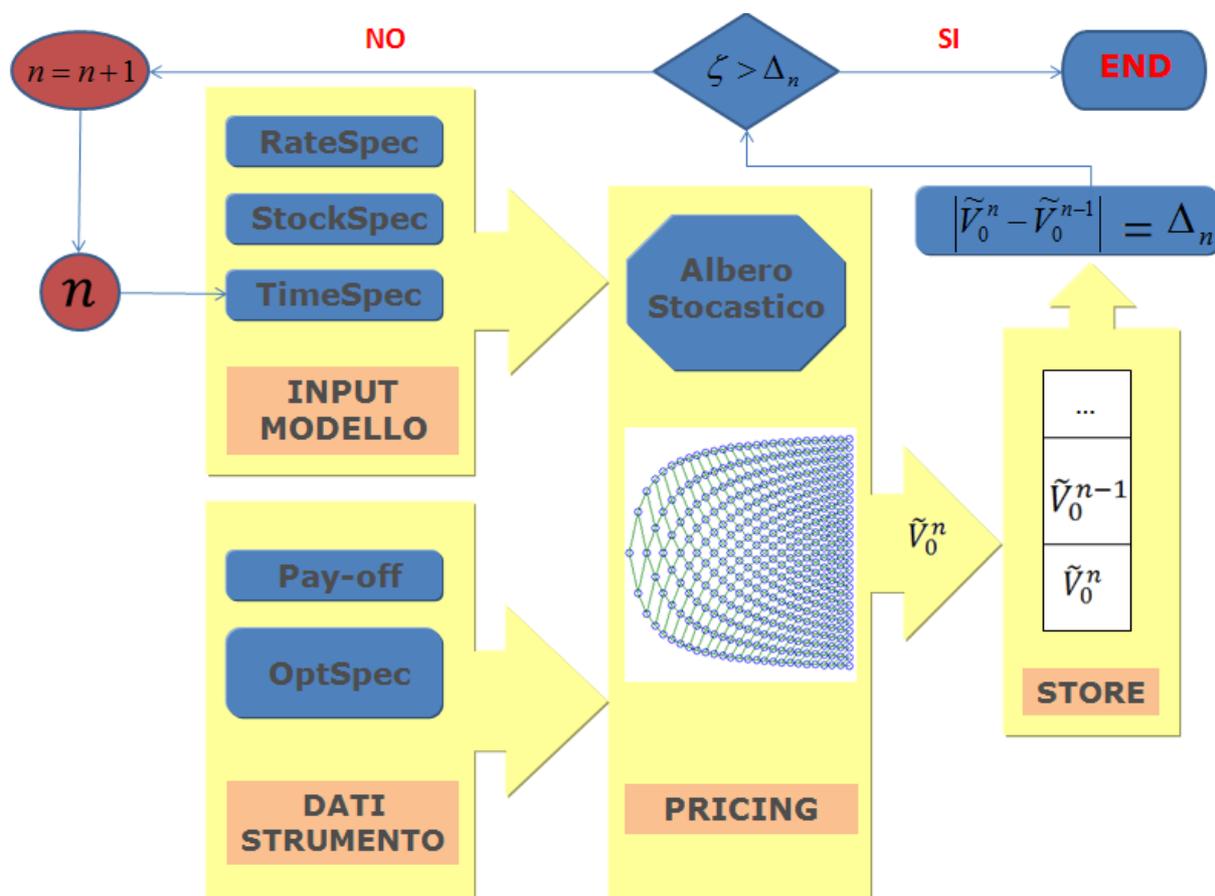


Figura 2. Architettura implementata in ambiente Matlab per il controllo dell'errore commesso sul Prezzo negli alberi CRR

### 3.1 Pricing di un'opzione plain-vanilla ed interpretazione dei risultati forniti dalla procedura

Come prima applicazione della metodologia di controllo si presenta il problema del controllo della convergenza sul prezzo di un'opzione Call plain-vanilla, valutata con la curva free-risk del 11 Marzo 2011 e bootstrappata mediante il software *Matfin*, Add-In di Excel sviluppato dal Middle Office di Banca CARIGE basato su librerie Matlab (Figura 3).

TERM - STRUCTURE						
Tipo	Tenore	BID	ASK	MID	Attivo	Base
Deposit	EURON_DEP_ON	0,56	0,66	0,61	1	ACT/360
Deposit	EURON_DEP_TN	0,69	0,79	0,74	1	ACT/360
Deposit	EUR_DEP_01W	0,63	0,77	0,7	1	ACT/360
Deposit	EUR_DEP_01M	0,84	0,94	0,89	1	ACT/360
Deposit	EUR_DEP_02M	0,94	1,15	1,05	1	ACT/360
Deposit	EUR_DEP_03M	1,04	1,19	1,12	1	ACT/360
Deposit	EUR_DEP_06M	1,42	1,77	1,6	1	ACT/360
Deposit	EUR_DEP_09M	1,63	1,73	1,68	1	ACT/360
Deposit	EUR_DEP_01Y	1,74	2,04	1,89	1	ACT/360
Swap	EUR_SWP_02Y	2,217	2,232	2,22	1	30/360
Swap	EUR_SWP_03Y	2,508	2,538	2,52	1	30/360
Swap	EUR_SWP_04Y	2,736	2,746	2,74	1	30/360
Swap	EUR_SWP_05Y	2,924	2,934	2,93	1	30/360
Swap	EUR_SWP_06Y	3,079	3,087	3,08	1	30/360
Swap	EUR_SWP_07Y	3,191	3,221	3,21	1	30/360
Swap	EUR_SWP_08Y	3,305	3,315	3,31	1	30/360
Swap	EUR_SWP_09Y	3,396	3,404	3,4	1	30/360
Swap	EUR_SWP_10Y	3,45	3,5	3,48	1	30/360
Swap	EUR_SWP_12Y	3,591	3,641	3,62	1	30/360
Swap	EUR_SWP_15Y	3,739	3,789	3,76	1	30/360
Swap	EUR_SWP_20Y	3,815	3,865	3,84	1	30/360
Swap	EUR_SWP_25Y	3,764	3,814	3,79	1	30/360
Swap	EUR_SWP_30Y	3,669	3,719	3,69	1	30/360
Swap	EUR_SWP_35Y	3,586	3,636	3,61	1	30/360
Swap	EUR_SWP_40Y	3,534	3,584	3,56	1	30/360
Swap	EUR_SWP_50Y	3,481	3,531	3,51	1	30/360

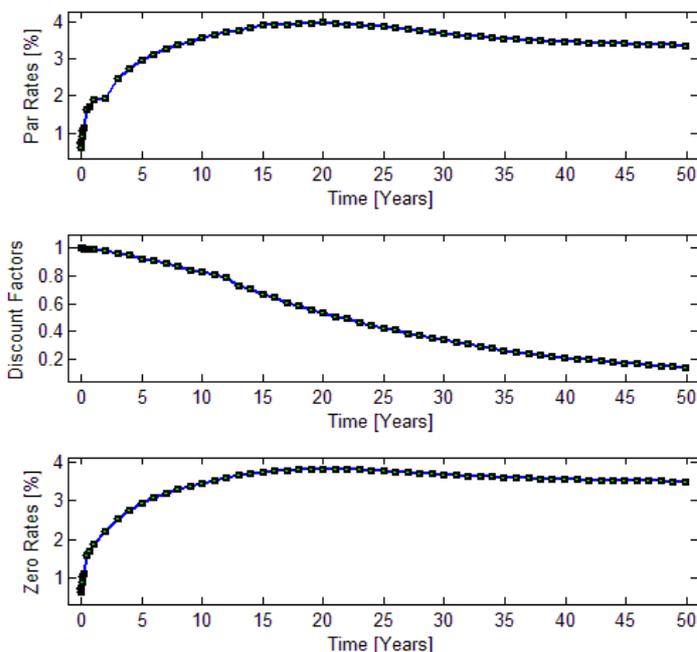


Figura 3. Bootstrap della curva priva di rischio con dati di mercato del 11 Marzo 2011 eseguito con le librerie di *Matfin*

Si riportano nella Figura 4 i dati di ingresso con il quale si è eseguito il pricing dello strumento finanziario.

RateSpec		StockSpec	
Curve Settle	11/03/2011	S0 - Valore iniziale Azione	4.61 €
Metodologia di Bootstrap	Market - Instruments	$\sigma$ - Volatilità	35 %
Software di elaborazione	Matfin	Dividend Yield	0
TimeSpec		OptSpec	
t0 - inizio discretizzazione	11/03/2011	Tipo Opzione	Call
T - fine discretizzazione	29/09/2016	K - Strike Price	4.43 €
n - Periodi di discretizzazione	Variabile di controllo	Settle	15/03/2011
		Maturity Date	29/09/2016
		Tipo Esercizio	Europeo

Tolleranza ( $\zeta$ ) = 0.04 € ; Num Max Iter: 20

Figura 4. Pricing di un'opzione call plain-vanilla europea con tolleranza di 4 centesimi

Eseguendo la valorizzazione del derivato con tali dati, il modello numerico converge al livello di accuratezza desiderato dopo 13 iterazioni, quindi per  $n = 13$  discretizzazioni temporali.

Il prezzo determinato con la precisione massima di 4 centesimi è pari a 1.9189.

La procedura fornisce a corredo del risultato quattro grafici interattivi esplicativi della procedura:

L'albero di evoluzione del sottostante azionario ( $S_t^{n=13}$ ), l'albero dei Prezzi dell'opzione ( $\tilde{V}_t^{n=13}$ ), consentono di mappare l'intero processo seguito dalla catena markoviana (Figura 5).

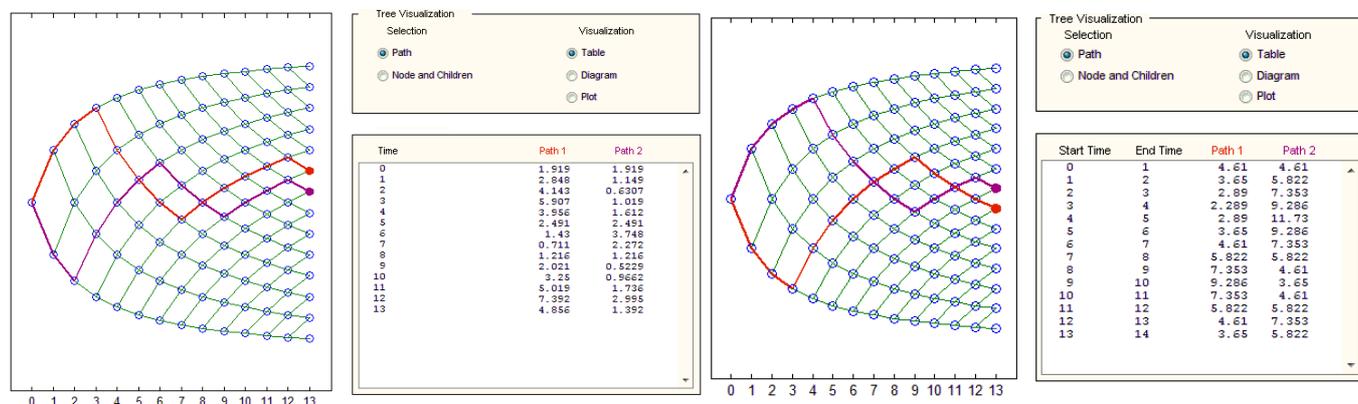


Figura 5. Alberi stocastici di evoluzione del sottostante azionario e del prezzo del derivato per  $n = 13$  e  $t = 0, \dots, n$

Grafici di controllo sulla convergenza dell'opzione: viene visualizzato l'andamento del Prezzo  $\tilde{V}_0^n$  all'aumentare di  $n$  ed il relativo errore commesso, stimato dalla quantità  $\Delta_n \equiv \tilde{V}_0^n - \tilde{V}_0^{n-1}$ . Il modello numerico converge se  $\Delta_n < \zeta$ , ovvero l'errore commesso alla  $n$ -esima discretizzazione è inferiore a quello preimpostato.

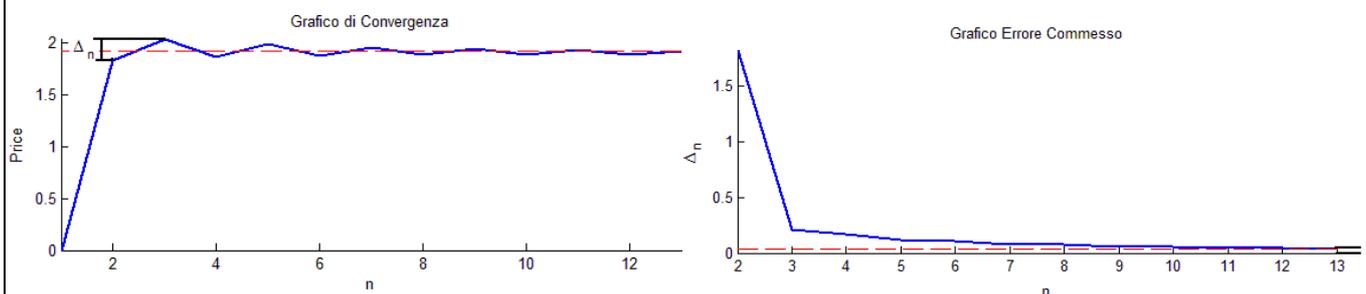


Figura 6. Grafico della convergenza al Prezzo dell'opzione  $[n, Price]$  e grafico dell'errore commesso  $[n, \Delta_n]$

Illustrato il funzionamento della procedura e avendo fornito le indicazioni sull'interpretazione degli output dell'algorithm, si passa ad analizzare i risultati sperimentali ottenuti su opzioni di tipo esotico.

### 3.2 Pricing di opzioni esotiche

Ci si propone di valorizzare con la precisione del millesimo ( $\zeta = 0.001$ ) le seguenti opzioni esotiche:

- Call americana di tipo look-back, le cui caratteristiche finanziarie sono riassunte nella Figura 7. L'algorithm ha raggiunto la convergenza dopo 38 iterazioni ed ha fornito una valorizzazione di 6.1218 € (Figura 8).
- Call americana di tipo asiatica, le cui caratteristiche finanziarie sono riassunte nella Figura 9. L'algorithm ha raggiunto la convergenza dopo 20 iterazioni ed ha fornito una valorizzazione di 1.3703 € (Figura 10).
- Opzione composta le cui caratteristiche finanziarie sono riassunte nella Figura 11. L'algorithm ha raggiunto la convergenza dopo circa 200 iterazioni ed ha fornito una valorizzazione di 2,68 centesimi (Figura 12).

RateSpec		StockSpec	
Curve Settle	11/03/2011	S0 - Valore iniziale Azione	9.19 €
Metodologia di Bootstrap	Market - Instruments	$\sigma$ - Volatilità	45 %
Software di elaborazione	Matfin	Dividend Yield	2 %

TimeSpec		OptSpec	
t0 - inizio discretizzazione	11/03/2011	Tipo Opzione	Call
T - fine discretizzazione	24/01/2014	K - Strike Price	9 €
n - Periodi di discretizzazione	Variabile di controllo	Settle	16/03/2011
		Maturity Date	24/01/2014
		Tipo Esercizio	Americano

Tolleranza ( $\zeta$ ) = 0.001 € ; Num Max Iter: 50

Figura 7. Pricing di un'opzione call lookback americana con tolleranza di 1 millesimo

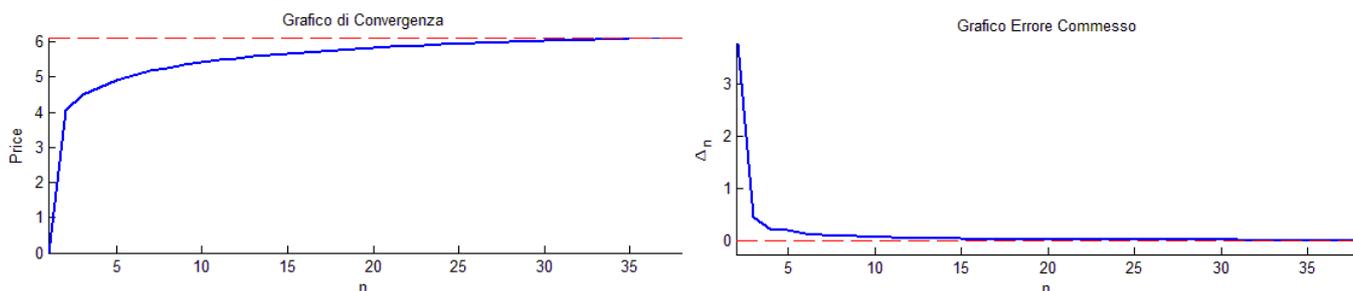


Figura 8. Grafici di Convergenza dell'opzione Call lookback americana

RateSpec		StockSpec	
Curve Settle	11/03/2011	S0 - Valore iniziale Azione	4.53 €
Metodologia di Bootstrap	Market - Instruments	$\sigma$ - Volatilità	20 %
Software di elaborazione	Matfin	Dividend Yield	0 %

TimeSpec		OptSpec	
t0 - inizio discretizzazione	11/03/2011	Tipo Opzione	Call
T - fine discretizzazione	26/10/2023	K - Strike Price	2.438 €
n - Periodi di discretizzazione	Variabile di controllo	Settle	11/03/2011
		Maturity Date	26/10/2023
		Tipo Esercizio	Europeo
		Tipo Media	Aritmetica
		Data di Inizio Campionamento	26/10/2012

Tolleranza ( $\zeta$ ) = 0.001 € ; Num Max Iter: 50

Figura 9. Pricing di un'opzione call asiatica europea con tolleranza di 1 millesimo

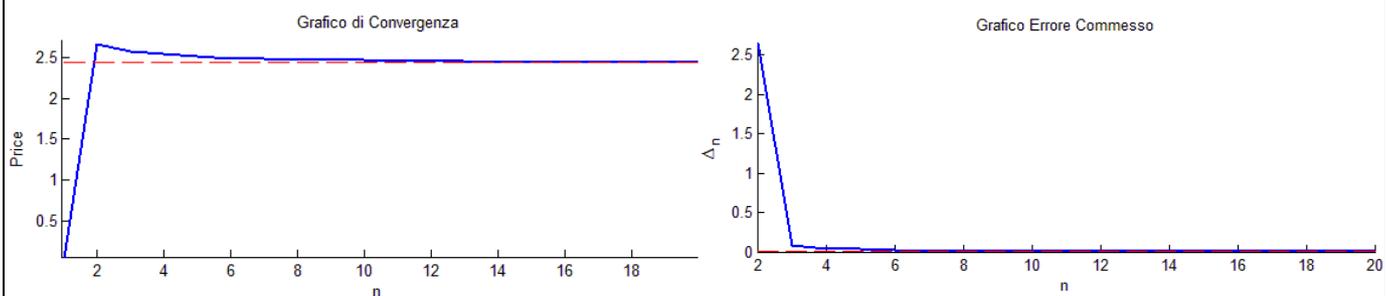


Figura 10. Grafici di Convergenza dell'opzione Call asiatica europea

RateSpec		StockSpec	
Curve Settle	11/03/2011	S0 - Valore iniziale Azione	2.438 €
Metodologia di Bootstrap	Market - Instruments	$\sigma$ - Volatilità	20.696%
Software di elaborazione	Matfin	Dividend Yield	0 %

TimeSpec		OptSpec	
t0 - inizio discretizzazione	11/03/2011	Tipo Opzione	Call
T - fine discretizzazione	05/04/2012	K - Strike Price	2.438 €
n - Periodi di discretizzazione	Variabile di controllo	Settle	11/03/2011
		Maturity Date	05/04/2012
		Tipo Esercizio	Europeo
		Tipo Opzione Comp.	Put
		Strike Price Comp.	0.05 €
		Settle Comp.	11/03/2011
		Maturity Comp.	05/04/2012
		Esercizio Comp.	Europeo

Tolleranza ( $\zeta$ ) = 0.001 € ; Num Max Iter: 50

Figura 11. Pricing di un'opzione composta con tolleranza di 1 millesimo

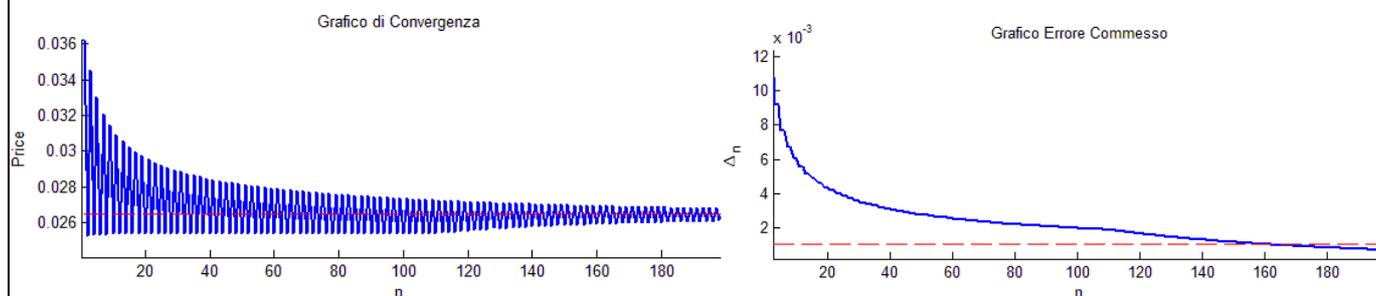


Figura 12. Grafici di Convergenza di un'opzione composta call-put

#### 4 Conclusioni

Si reputa che la tecnica automatizzata proposta possa essere impiegata come procedura operativa in un sistema di pricing di opzioni permettendo di ottenere il risultato teorico corrispondente al livello desiderato di precisione in tempi decisamente inferiori rispetto ad altre metodologie numeriche il cui controllo dell'errore sperimentale è computazionalmente più oneroso, quale ad esempio la metodologia Monte Carlo. Si considera interessante proseguire questo studio, estendendo l'analisi della convergenza sul prezzo per le tipologie di derivati scritti sui tassi d'interesse (ad esempio per i cap e floor) e che impiegano altri tipi di catene markoviane per interpretare le dinamiche di evoluzione del sottostante (si fa riferimento, per esempio agli alberi stocastici di Hull-White, Black-Derman-Toy, Black-Karasinski e Heath-Jarrow-Morton).

Pier Giuseppe Giribone e Simone Ventura

#### Bibliografia

- [1] R. Mosca, L. Cassettari, P. G. Giribone – “MSPE e Monte Carlo Pricing Method: tecniche di convergenza nei modelli finanziari” – AIFIRM Magazine (Associazione Italiana Financial Industry Risk Managers) (2010).
- [2] J. Cox, S. Ross, M. Rubinstein – “Option pricing: a simple approach” – Journal of Financial Economics, 7, 229-263 (1979)
- [3] F. Black, M. Scholes – “The pricing of options and corporate liabilities” – Journal of Political Economy, 81 (1973)
- [4] P. Billingsley – “Weak Convergence of Probability Measures” – John Wiley & Sons (New York 1968)
- [5] L. Rogers, D. Williams – “Diffusion, Markov Processes and Martingales” – John Wiley & Sons (New York 1987)
- [6] S. Ethier, T. Kurtz – “Markov Processes: Characterization and Convergence” – John Wiley & Sons (New York 1986)
- [7] J. Harrison, D. Kreps – “Martingales and multiperiod securities markets” – Journal of Economic Theory, 20 (1979)
- [8] H. Hue – “Convergence from discrete to continuous time financial models” – Finance Working Paper (1989)
- [9] J. Hull – “Futures and other derivatives” – Prentice Hall – Englewood Cliffs – New York (1997)
- [10] O. Caligaris, P.A. Zanghi – Dispense del corso di Dottorato in “Ingegneria Matematica e Simulazione” dell'Università di Genova “Equazioni Differenziali Stocastiche ed applicazioni”.
- [11] “Financial Derivatives Toolbox User's Guide” – The MathWorks – Natick, MA (2008)

